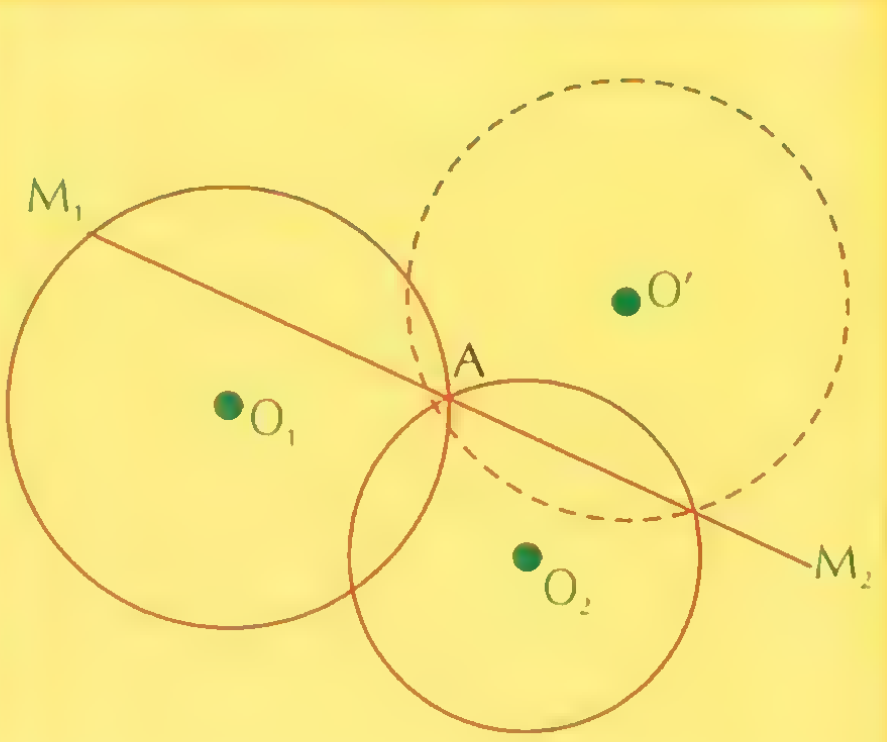
NGUYỄN NGỌC KHOA

KIẾN THỨC CƠ BẢN
HÌNH HỌC 10
& CÁC DẠNG BÀI TẬP ỨNG DỤNG



ĐH QG Hà Nội
NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN NGỌC KHOA
G.V: TRƯỜNG PTTH CHUYÊN LÊ KHIẾT

KIẾN THỨC CƠ BẢN
HÌNH HỌC 10
VÀ CÁC DẠNG BÀI TẬP ỨNG DỤNG

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

CHƯƠNG I: VECTƠ

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Vectơ là một đoạn thẳng có định hướng, kí hiệu $\overrightarrow{AB}$ (A được gọi là điểm đầu, B là điểm cuối).
2. Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ đó.

Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.

(Cùng hướng) (Ngược hướng)

3. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ là độ dài đoạn thẳng AB, kí hiệu $|\overrightarrow{AB}|$.
4. Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài, kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$.
5. Vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau được gọi là vectơ không, kí hiệu $\overrightarrow{AA} = 0$.

Chú ý rằng vectơ $\vec{0}$ cùng phương với mọi vectơ bất kì.

BÀI TẬP TRONG SÁCH GIÁO KHOA

BT (bài toán) 1: Vectơ khác với đoạn thẳng như thế nào

Trả lời: Vectơ khác với đoạn thẳng là: Vectơ là một đoạn thẳng có định hướng, nghĩa là trên đó có qui định một điểm là điểm đầu, một điểm là điểm cuối; các yếu tố xác định một vectơ là độ dài, phương hướng. Đoạn thẳng được xác định bởi 2 đầu mút.

Ví dụ: cho 2 điểm phân biệt A, B ta có AB = BA nhưng $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ vì chúng ngược hướng.

BT2: Trong hình vẽ sau vectơ nào cùng phương, vectơ nào cùng hướng và các vectơ nào bằng nhau.

Trả lời: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, $\overrightarrow{BA}$ cùng phương; $\vec{e}$, $\vec{f}$ cùng phương; $\vec{c}$, $\vec{d}$ cùng phương $\vec{a}$, $\vec{b}$, cùng hướng; $\vec{x}$, $\overrightarrow{BA}$ cùng hướng; $\vec{e}$, $\vec{f}$ cùng hướng; $\vec{c}$, $\vec{d}$ cùng hướng

$\vec{x} = \overrightarrow{BA}$; $\vec{c} = \vec{d}$ (xem hình vẽ trong SGK)

BT3: Các mệnh đề sau đây là đúng hay sai

a. Vectơ hoàn toàn xác định khi biết độ dài của nó

b. Hai vectơ cùng phương với vectơ thứ ba khác vectơ không thì cù phương với nhau.

c. Hai vectơ ngược hướng với vectơ thứ ba khác vectơ không thì cùng hướ

Trả lời:

a. Sai

Vectơ hoàn toàn xác định khi biết độ đài, phương, hướng của nó.

b. Đúng.

Giả sử hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ và cùng phương với vectơ thứ ba $\vec{x}$ kh vectơ không nhưng $\vec{a}$, $\vec{b}$ không cùng phương $\Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$ (vì $\vec{x}$ cùng phươ với 2 vectơ khác phương) vô lí.

c. Đúng.

BT4: a. Cho điểm I. Tìm tập hợp các điểm cuối của các vectơ có điểm đ là I và có độ dài bằng 5cm;

b. Cho vectơ $\vec{v}$. Tìm tập hợp các điểm cuối của các vectơ $\vec{v}$ có điể đầu chạy trên đường thẳng d cho trước.

Giải:

a. Gọi M là điểm thoả mãn $\overrightarrow{IA}$ có độ dài $|\overrightarrow{IA}| = IA = 5cm$

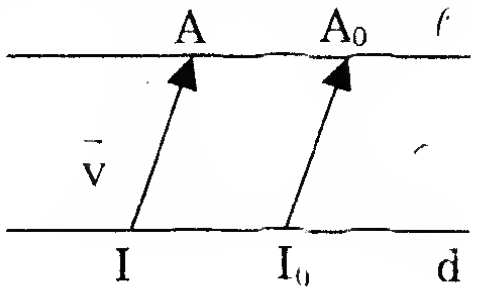
Vì M cách I cố định một khoảng cách bằng 5cm, nên tập hợp c điểm M là đường tròn tâm I bán kính R = 5cm.

b. Lấy điểm I cố định thuộc d, đựng $\overrightarrow{IA} = \vec{v}$

$\Rightarrow$ A cố định

Qua A dựng ℓ song song với d

(hoặc trùng với d nếu giá của $\vec{v}$ song song hoặc trùng với d)



$\Rightarrow \ell$ cố định

Lấy I_0 bất kì thuộc d, dựng $\overrightarrow{I_0A_0} = \vec{v}$

$\Rightarrow \overrightarrow{I_0A_0} = \overrightarrow{II_0} \Rightarrow A_0 \in \ell$

Ngược lại lấy $A_0 \in \ell$, dựng $\overrightarrow{I_0A_0} = \vec{v} = \overrightarrow{IA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{II_0} = \overrightarrow{AA_0}$

$I \in d$

Vậy tập hợp các điểm A_0 là đường thẳng ℓ.

Chú ý: Để tìm tập hợp các điểm M thoả tính chất p nào đó ta tiế hành 2 phần:

- Phần thuận: Dựa vào tính chất p ta chứng minh M thuộc hình H c định nào đó.
- Phần đảo: Lấy M bất kì thuộc hình H ta chứng minh M thoả tính chất p

Kết luận tập hợp các điểm M là hình H.

Để giải bài toán tìm tập hợp điểm có hiệu quả ta tiến hành các thao tác cơ bản sau:

* Xác định các yếu tố không đổi liên quan đến điểm cần tìm tập hợp. Ví dụ cho vectơ $\vec{v}$ ta biết phương, hướng và độ dài của nó không đổi.

* Vẽ một vài điểm M để dự đoán tập hợp, thường ta phải vẽ 3, 4 điểm trở lên.

Ví dụ về các điểm M ta có các điểm M_1, M_2, M_3 không thẳng hàng ta dự đoán tập hợp M là đường tròn; nếu các điểm M_1, M_2, M_3 là thẳng hàng ta có thể dự đoán tập hợp các điểm M là đường thẳng (chú ý thao tác này chỉ mang tính chất dự đoán).

Giải: Cho vectơ $\vec{v} \neq \vec{0}$, và đường tròn (C). Tìm tập hợp các điểm cuối của các vectơ bằng vectơ $\vec{v}$ và có điểm đầu thuộc đường tròn (C)

Các thao tác suy luận: (C) cố định nên tâm O cố định và bán kính R không đổi

Lấy 3 điểm I_1, I_2, I_0 thuộc (C), vẽ $\overrightarrow{I_0M_0} = \overrightarrow{I_1M_1} = \overrightarrow{I_2M_2} = \vec{v}$ ta nhận xét M_1, M_2, M_0 không thẳng hàng, ta dự đoán tập hợp các điểm M là đường tròn, ta xác định tâm và bán kính của đường tròn này.

Giải:

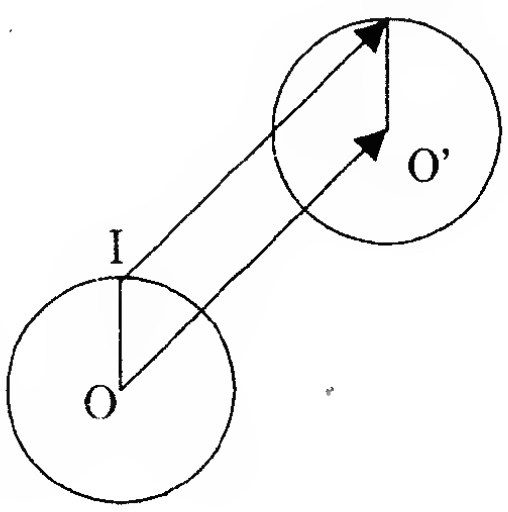
Phần thuận: Gọi O' là điểm thoả mãn

$\overrightarrow{OO'} = \vec{v} \Rightarrow$ O' cố định,

Lấy I bất kì thuộc (C), vẽ $\overrightarrow{IM} = \vec{v}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{O'M} \Rightarrow O'M = R$

$\Rightarrow$ M thuộc đường tròn đường tròn tâm O' bán kính R.



Phần đảo: Lấy M thuộc đường tròn đường tròn tâm O' bán kính R, Dựng điểm I sao cho $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{OO'} = \vec{v}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{O'M} \Rightarrow OI = R$

$\Rightarrow$ I thuộc đường tròn (C)

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O' bán kính R.

BT5: Cho tứ giác ABCD biết $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Khi đó ABCD là hình gì?

Giải:

Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow$ AB và CD song song và bằng nhau $\Rightarrow$ ABCD là hình bình hành.

BT6: Cho 3 điểm ABC không thẳng hàng. Dựng điểm D sao cho A, B, C, D là 4 đỉnh của hình bình hành. Có bao nhiêu điểm D như thế ?

ĐS: Có 3 điểm D.

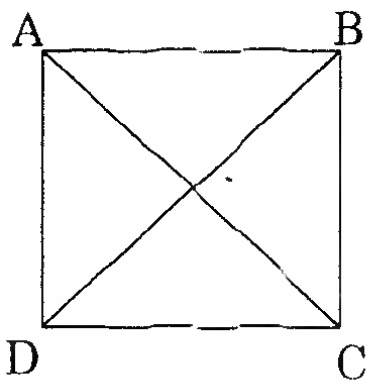
Chú ý: Để chứng minh $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ta có thể sử dụng các phương pháp sau:

* Chứng minh $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng và cùng độ dài (định nghĩa).
* Chứng minh ABDC là hình bình hành (bài 5)
* Chứng minh $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng bằng vectơ thứ 3

BÀI TẬP BỔ SUNG

BT7: Cho hình vuông ABCD có tâm O. Liệt kê các vectơ bằng nhau c điểm đầu và điểm cuối là các điểm A, B, C, D, O.

Giải:



ABCD là hình vuông (nên là hình bình hành!) nên ta có:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$

O là trung điểm của AC và BD ta có:

$\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$.

BL1: Cho 4 điểm phân biệt A, B, C, D. Hãy tính số các vectơ khác nha nhiều nhất có thể có được và khác $\vec{0}$ có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.

HD: Lấy A làm điểm đầu, nối với các điểm còn lại ta có 3 vect $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$.

Tiến hành với 3 điểm còn lại B, C, D ta có tất cả: 3. 4 = 12 vectơ.

BL2: Hãy tính số các vectơ khác nhau và khác $\vec{0}$ nhiều nhất có thể có đượ với số điểm đầu và điểm cuối được cho bởi n điểm phân biệt (n > 1) (SBT).

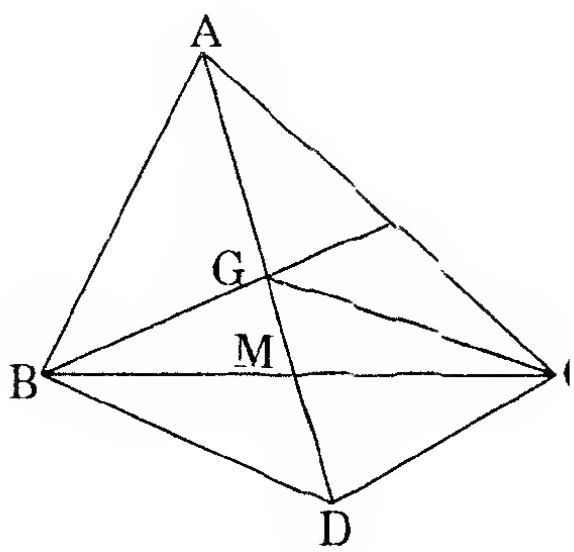
HD: Giải tương tự như BT1 ta có n(n – 1) vectơ.

BT8: Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi M là trung điểm của BC lấy điểm D đối xứng với điểm G qua M.

Chứng minh:

a. $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GD}$ b. $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{DC}$.

Giải:



a. Theo tính chất của trọng tâm ta có:

AG = 2GM

Mặt khác 2GM = GD, nên AG = GD

Lại do $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{GD}$ cùng hướng

$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GD}$.

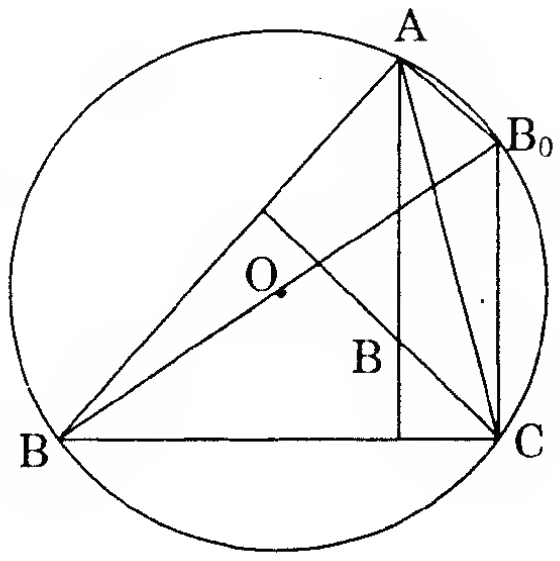
b. Tứ giác BGCD có 2 đường chéo BC và GD cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường nên nó là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{DC}$.

BT9: Gọi O, H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác ABC. B_0 là điểm đối xứng của B qua O. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B_0C}$ (SBT).

Giải:

Nếu ΔABC vuông tại C $\Rightarrow A \equiv B_0$,

$H \equiv C \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B_0C}$.



Nếu ΔABC không vuông tại C

Cần chứng minh tứ giác AB_0CH là hình bình hành

Ta có:

$\widehat{BCB_0} = 90^\circ$ (góc nội tiếp nửa đường tròn)

$AH \perp BC$

$\Rightarrow AH // B_0C$

Chứng minh tương tự ta có: $HC // AB_0$

Vậy AB_0CH là hình bình hành

$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B_0C}$.

BL1: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O, có H là trực tâm. Gọi D là điểm đối xứng với O qua đường thẳng BC. Chứng minh $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OD}$. Giả sử B, C cố định, A di động trên đường tròn tâm O; hãy tìm tập hợp trực tâm H của tam giác ABC.

HD: a. Chứng minh $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OD}$.

Sử dụng cách chứng minh và kết quả BT3

Gọi B_0 đối xứng với B qua O. Dùng tính chất đường trung bình của tam giác để chứng minh $\overrightarrow{B_0C} = \overrightarrow{OD}$

Theo kết quả BT3 ta có $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B_0C} \Rightarrow \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OD}$.

b. Tập hợp các điểm H là đường tròn tâm D bán kính R.

BL2: Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ thì $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$

HD: Xét các trường hợp

$\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ có giá trị trùng nhau thì $\overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng hãy chứng minh BD = AC.

$\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ có giá không trùng nhau, nhận dạng tứ giác ABDC.

BL3: Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. O là giao điểm của MP và QN. Chứng minh: $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{OP}$ và $\overrightarrow{QO} = \overrightarrow{ON}$.

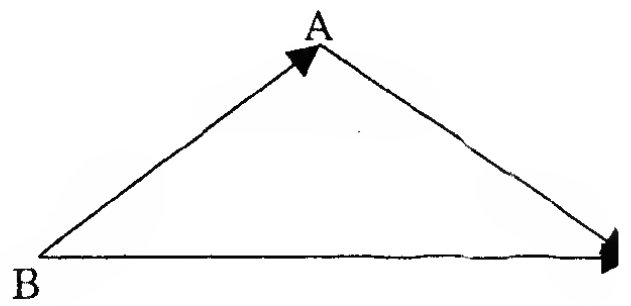
HD: Nếu các đẳng thức vectơ cần chứng minh xảy ra, hãy suy ra vị t tương đối của O đối với MP, của O đối với NQ từ đó định ra điều cầ chứng minh.

PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ HAI VECTƠ

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. PHÉP CỘNG 2 VECTƠ

1. Định nghĩa: Cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy điểm A tuỳ ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.



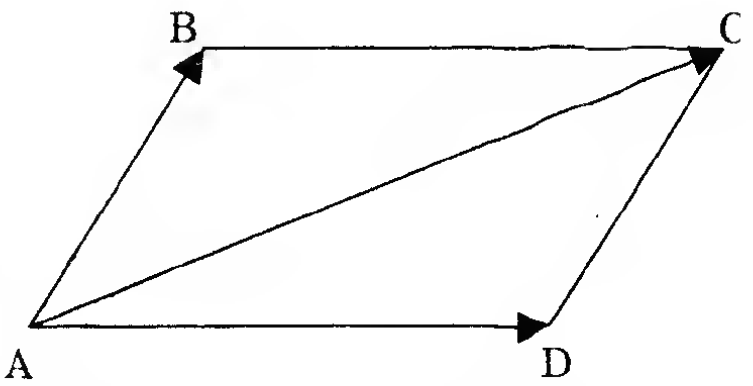
Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}.$$

2. Các qui tắc

a. Qui tắc 3 điểm: Cho 3 điểm bất kì M, N, P ta có:

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}.$$



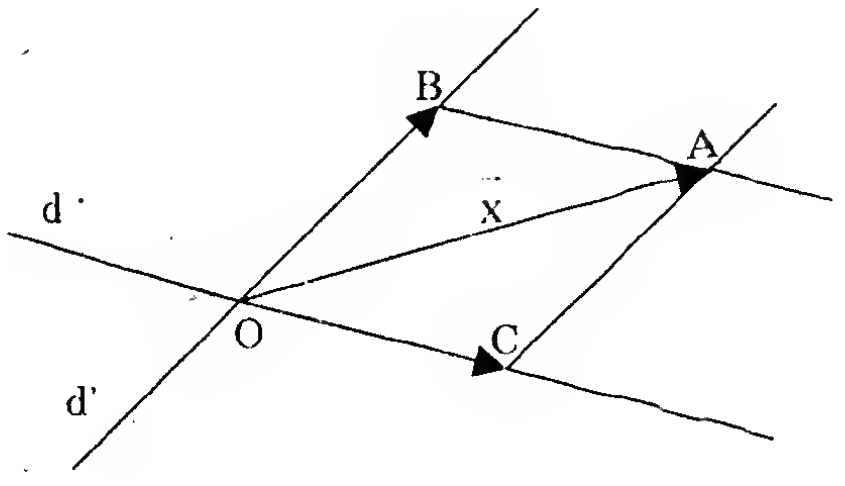
b) Qui tắc hình bình hành: Cho 2 vectơ không cùng phương $\overrightarrow{AB}$ v $\overrightarrow{AD}$, vẽ hình bình hành ABCD, khi đó: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

3. Phân tích một vectơ thành tổng 2 vectơ không cùng phương

Việc phân tích vectơ $\vec{x}$ theo 2 vectơ không cùng phương được tiến hành như sau

Vẽ đường thẳng d, d' bất kì và cắt nhau tại O

Vẽ $\vec{x}$ bằng $\overrightarrow{OA}$. Vẽ hình bình hành OBAC



Ta có: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

4. Tính chất phép cộng vectơ:

Với mọi 3 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ta có:

a. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (Tính giao hoán).

b. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (Tính kết hợp).

c. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ (Tính chất của vectơ không).

II. PHÉP TRỪ 2 VECTƠ:

1. Vectơ đối: Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ được gọi là đối nhau nếu chúng có cùng độ dài và ngược hướng, kí hiệu: $\vec{a} = -\vec{b}$ hoặc $\vec{b} = -\vec{a}$. Đặc biệt vectơ đối của vectơ $\vec{0}$ là vectơ $\vec{0}$.

2. Phép trừ 2 vectơ: Cho 2 vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ Ta gọi vectơ $\vec{a} + (-\vec{b})$ là hiệu của 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$.

Chú ý: Cho 2 điểm A, B. Với mọi điểm O bất kì ta có:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$..

BÀI TẬP TRONG SÁCH GIÁO KHOA

BT1: Cho hình bình hành ABCD và M một điểm bất kì. Chứng minh $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

HD: Ta chứng minh VT bằng VP bằng cách sử dụng qui tắc 3 điểm biến đổi để lần lượt xuất hiện các vectơ ở VP.

Theo qui tắc 3 điểm ta có:

$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}$ (làm xuất hiện vectơ $\overrightarrow{MB}$ ở VP)

$\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{MC}$

$= \overrightarrow{MB} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC})$ (Tính chất kết hợp)

$= \overrightarrow{MB} + (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BA})$ (Tính chất giao hoán)

Ta cần chứng minh $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MD}$

Do ABCD là hình bình hành ta có: $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.

BT2: Chứng minh với tứ giác ABCD bất kì ta có:

a. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$; b. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$

Giải:

a. *Cách 1:* Sử dụng phương pháp trình bày ở BT1 ta chứng minh VT bằng VP

Theo qui tắc 3 điểm ta có:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB})$

Theo tính chất của phép trừ vectơ ta có:

$\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$.

Cách 2: Ta chứng minh 2 biểu thức ở 2 vế cùng bằng biểu thức thứ 3, ằng các sử dụng tính chất của phép trừ vectơ;

Lấy điểm O bất kì ta có:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) - (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}) - (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB}$$

$$= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} \quad (22)$$

(1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$

Cách giải 3: Dùng phép biến đổi tương dương ta biến đổi đẳng thức ần chứng minh tương dương với đẳng thức đúng, thường ta hay sử dụng ác tính chất sau:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{c}$$

$$\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$$

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}$$

Đẳng thức cuối cùng đúng, vậy đẳng thức cần chứng minh đúng.

b. Ta chứng minh VT bằng VP:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{CD} \quad \text{(Qui tắc 3 điểm)}$$

$$= \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD}) \quad \text{(Tính chất kết hợp)}$$

$$= \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}) \quad \text{(Tính chất giao hoán)}$$

$$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} \quad \text{(Qui tắc 3 điểm).}$$

L1: Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh đẳng thức sau:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EB}.$$

Giải:

Cách 1: Biến đổi VT bằng VP

Sử dụng qui tắc 3 điểm, biến đổi VT làm xuất hiện các vectơ $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{EB}$ ở VP

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FD}) + (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BF})$$

$$= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{EB}) + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{BF})$$

Ta chỉ cần chứng minh $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{BF} = \vec{0}$, bạn đọc hãy sử dụng ıi tắc 3 điểm để chứng minh điều này

Cách 2: Chứng minh cả 2 biểu thức vectơ ở 2 vế cùng bằng biểu thức ɛctơ thứ 3

Lấy điểm O bất kì ta có :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE}$$

)

Làm tương tự cho biểu thức vectơ ở VP ta có đẳng thức cần ch
minh

BT3: Cho tam giác ABC. Bên ngoài của tam giác vẽ các hình bình h
ABIJ, BCPQ, CARS. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}.$$

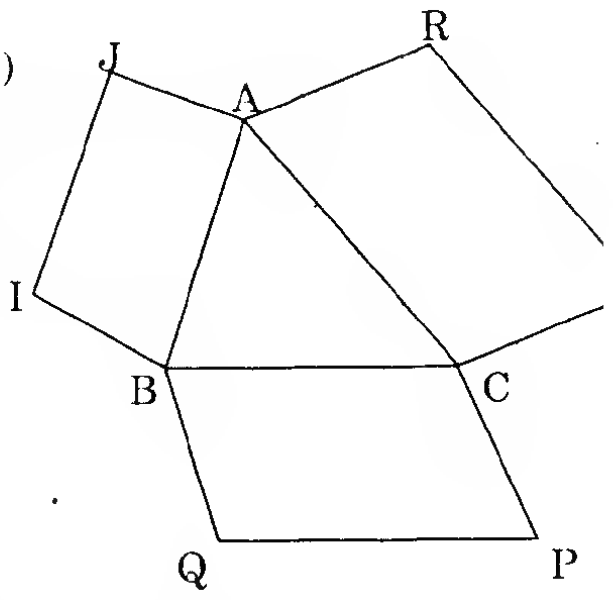
Giải:

Ta chứng minh VT bằng VP. Theo qui tắc 3 điểm

$$\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS}$$

$$= (\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AJ}) + (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BQ}) + (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS})$$

$$= (\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{CS}) + (\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{PC})$$



Do ABIJ, BCPQ, CARS là hình bình hành nên ta có:

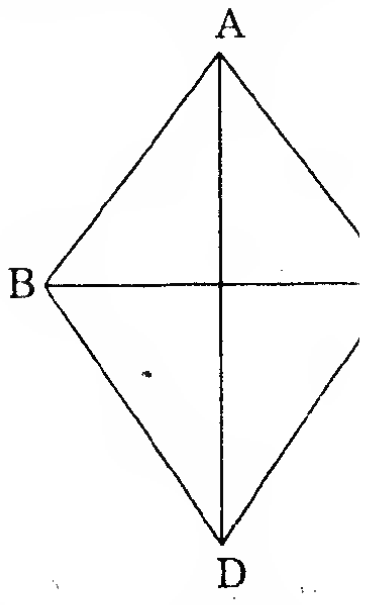
$$\overrightarrow{RA} = -\overrightarrow{CS} \Leftrightarrow \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{CS} = \vec{0}$$

Tương tự ta có:

$$\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{IB} = \vec{0};\ \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.$$

BT4: Cho tam giác đều ABC. Có cạnh bằng a. Tính độ dài của các v
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$.



HD: Ta xác định độ dài các vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$ theo A các yếu tố của tam giác ABC dựa vào các qui tắc đã biết.

a. Hai $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ có cùng điểm đầu ta xác định vectơ tổng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ theo qui tắc hình bình hành

Vẽ hình bình hành ABDC.

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

ABDC là hình bình hành có 2 cạnh kề bằng nhau nên là l thoi. Gọi H là giao điểm của AD, BC, ta có AH là đường cao của tam đều cạnh a nên $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}a \quad \Rightarrow AD = 2AH = \sqrt{3}a$

Vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = AD = \sqrt{3}a.$

b. Theo qui tắc 3 điểm ta có :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = AC = a.$$

c. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = -(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$

Vì 2 vectơ đối nhau có độ dài bằng nhau nên

$|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}| = |-(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$

Giải tương tự như câu a ta có: $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = \sqrt{3}\,a$.

Chú ý: Để tính độ dài của một biểu thức vectơ ta tính biểu thức vectơ đó theo một vectơ xác định, sau đó dựa vào các công thức tính các yếu tố của tam giác, tứ giác để tính độ đài của vectơ này ...

BL1: Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. Tính độ dài của các vectơ:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BO}.$$

HD:

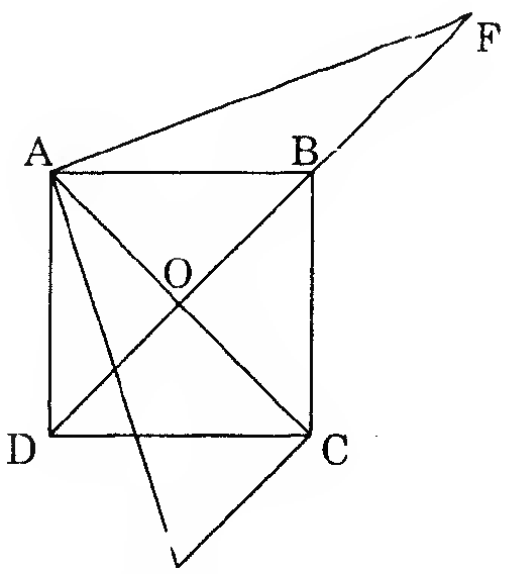
a. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.

b. Từ C dựng $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BO}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}$

Tính AE đựa vào tam giác vuông ACE có

$AC = a\sqrt{2}$, $CE = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.



c. Giải tương tự câu b

Từ B đựng $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{BO}$ (B là trung điểm của OF).

BT5: Cho hình bình hành ABCD có tâm O. Chứng minh rằng:

a. $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ b. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$;

c. $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$ d. $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

Giải:

a. Có nhiều cách chứng minh, ở đây ta chứng minh VT bằng VP bằng cách sử dụng các qui tắc, tính chất đã biết.

$\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CO} - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB})$ (Do $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$)

$= \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BA}$ (Do $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$)

Ta chỉ cần chứng minh $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OA} = \vec{0}$

Vì O là trung điểm của AC nên: $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OA} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \vec{0} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}$.

b. Sử dụng các qui tắc này đã biết kết hợp với phương pháp tương đương để chứng minh câu hỏi này

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (*) (Qui tắc 3 điểm)

Do ABCD là hình bình hành nên đẳng thức (*) đúng, do đó đẳng thức cần chứng minh đúng.

c. $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ (1)

(Tính chất phép trừ 2 vecto

Do ABCD là hình bình hành nên đẳng thức (1) đúng, đo đó đẳng thức cần chứng minh đúng.

d. Ta chứng minh bằng phương pháp tương đương

$\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ (Do $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BA}$)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ (2)

Do ABCD là hình bình hành nên đẳng thức (1) đúng, đo đó đẳng thức cần chứng minh đúng.

BT6 Cho các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác vectơ không. Khi nào có các đẳng thức sa

a. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$; b. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$.

Giải:

Sử dụng định nghĩa phép cộng, phép trừ vectơ, vẽ hình thích hợp tạ quii về xét mối liên hệ của các yếu tố của tam giác

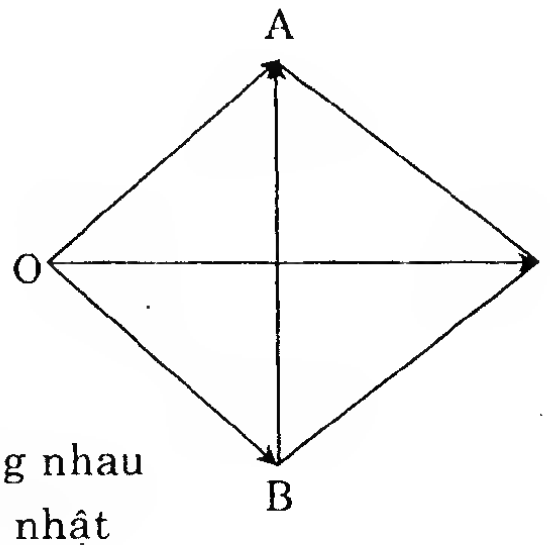
Vẽ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, ta có: $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = AC, |\vec{a}| = AB, \vec{b} = BC$

a $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \Leftrightarrow AB + BC = AC \Leftrightarrow$ B ở giữa A, C

$\Leftarrow \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng.

b Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương, rõ ràng $|\vec{a} + \vec{b}| \neq |\vec{a} - \vec{b}|$ vì $\vec{a}$, $\vec{b}$ khá vecto không.



Nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác phương:

Vẽ hình bình hành OACB, sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$

$\overrightarrow{OB} = \vec{b} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$

$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$

$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| \Leftrightarrow OC = BA$

Hnh bình hành OACB có 2 đường chéo bằng nhau

Nên là hình chữ nhật $\Rightarrow$ OACB là hình chữ nhật

$\Rightarrow$ giá của $\vec{a}$ vuông góc với giá của $\vec{b}$.

Chú ý:

a. Với vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ta có $||\vec{a}| - |\vec{b}|| \le |\vec{a} \pm \vec{b}| \le |\vec{a}| + |\vec{b}|$

(Bạn đọc hãy chứng minh bất đẳng thức ở vế trái).

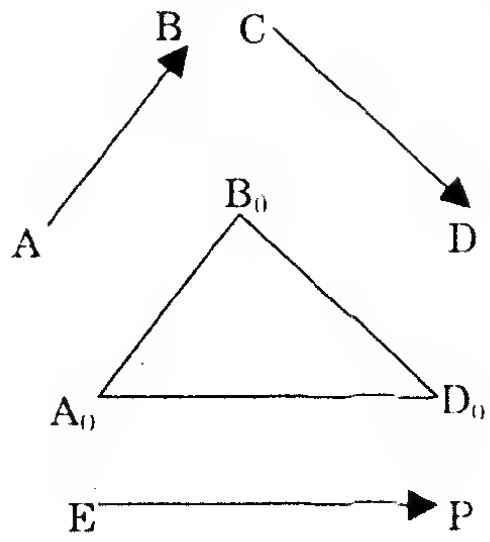
b. Nếu Có 3 vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ không cùng phương từng đôi và thoả mãn $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}$ thì AB, CD, EF là độ đài 3 cạnh của tam giác nào đó.

Chứng minh b.

Vẽ $\overrightarrow{A_0B_0} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_0D_0} = \overrightarrow{CD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A_0B_0} + \overrightarrow{B_0D_0} = \overrightarrow{A_0D_0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{A_0D_0}$.



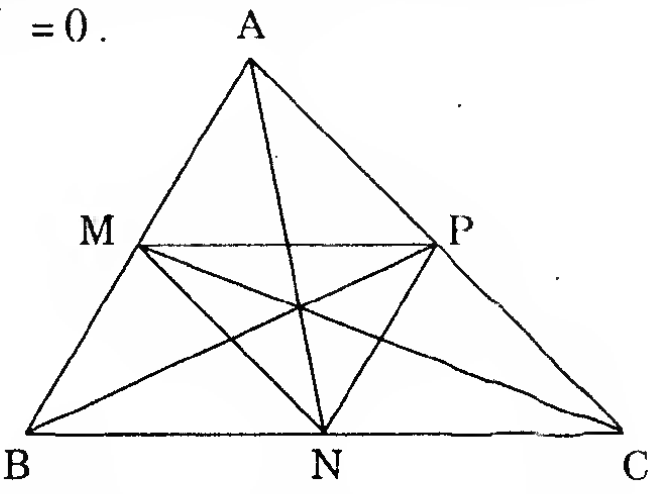
Mặt khác $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ không cùng phương từng đôi nên $\overrightarrow{A_0B_0}$, $\overrightarrow{B_0D_0}$ không cùng phương nên $A_0B_0D_0$ là một tam giác, hơn nữa rõ ràng $AB = A_0B_0$, $B_0D_0 = CD$, $EF = A_0D_0$.

BL1: a. Cho $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$;

b. Cho tam giác ABC, gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA. Chứng minh rằng AN, BP, CM là độ dài 3 cạnh của tam giác nào đó.

HD: a. Hiển nhiên

b. Vì $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{CM}$ không cùng phương, sử dụng kết quả chú ý b ta chỉ cần chứng minh $\vec{v} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.



Ta có: $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$

$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}$

$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP}$

$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM}$

$$\Rightarrow \vec{v} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM}$$

$$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CP}) + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM})$$

$= \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$

Theo câu a $\Rightarrow \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow$ AN, BP, CM là độ đài 3 cạnh của tam giác nào đó.

BT7: Cho $|\vec{a} + \vec{b}| = 0$. So sánh độ dài phương hướng của $\vec{a}$, $\vec{b}$

Giải:

Vectơ có độ dài bằng 0 khi và chỉ khi vectơ đó là vectơ không

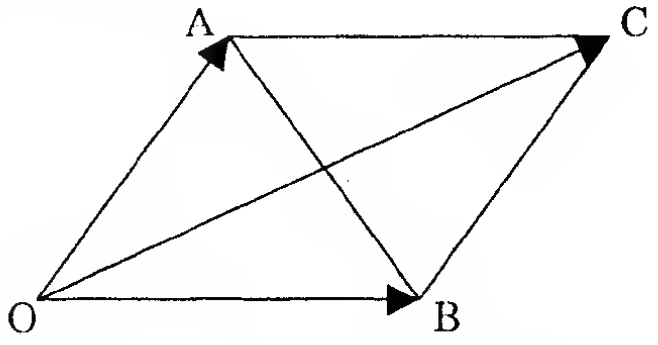
$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = -\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ là 2 vectơ đối nhau.

BT8: a. Cho 2 vectơ $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ có $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 5$, $\widehat{AOB} = 60^0$. Xác định $\vec{c}$ sao cho $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$;

b Cho 3 lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$, $\overrightarrow{F_3}$ tác dụng vào một vật có cùng điểm đặt M. Hai lực $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ có độ lớn đều bằng 100N và giá của chúng tạo với nhau góc 60^0. Tìm độ lớn của $\overrightarrow{F_3}$, biết rằng vật đứng yên.

HD: $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{c} = -(\vec{a} + \vec{b})$

Vì vậy ta chỉ cần xác định vectơ $\vec{a} + \vec{b}$



Giải:

Dựng hình bình hành OACB $\Rightarrow$ OACB là hình thoi và $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OC}$

Vì $\widehat{AOB} = 60^0$ nên tam giác cân OAB là tam giác đều $\Rightarrow AB = 5$

Gọi I là tâm của hình thoi $\Rightarrow AI = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{5}{2}$

Sử lụng định lí Pitago cho tam giác vuông AOI ta có:

$OI^2 = AO^2 - AI^2 = 5^2 - \left(\dfrac{5}{2}\right)^2 = 25 - \dfrac{25}{4} = \dfrac{75}{4} \Rightarrow OI = \sqrt{\dfrac{75}{4}} = \dfrac{5}{2}\sqrt{3}$

$\Rightarrow OC = 2OI = 5\sqrt{3}$

Vậy vectơ $\vec{c}$ ngược hướng với $\overrightarrow{OC}$ và có độ dài bằng $5\sqrt{3}$.

b. Theo định luật 3 Niutơn vật đứng yên khi $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \vec{0}$

Vẽ $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{F_2}$ với MA = MB = 100. Vì giá của $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ tạo với nhau góc 60^0 nên có 2 trường hợp xảy ra:

TH1: $\widehat{AMB} = 60^0$

Dựng hình bình hành MACB $\Rightarrow$ MACB là hình thoi và $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{MC}$

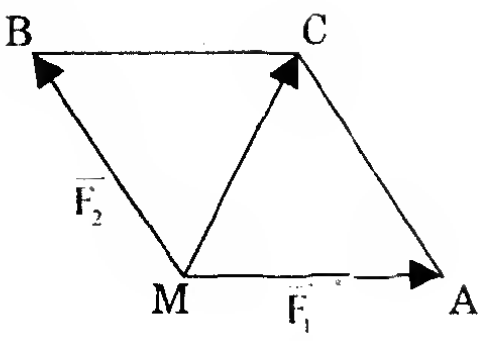
$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{F_3} = -(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}) = -\overrightarrow{MC}$.

Gọi I là tâm của MACB, Tương tự câu a, AI = 50

$MI^2 = AM^2 - AI^2 = 100^2 - 50^2 = 3.50^2$

$\Rightarrow MI = 50\sqrt{3}$

$\Rightarrow MC = 100\sqrt{3}$



Vậy $\vec{F_3}$ ngược hướng với $\overrightarrow{MC}$ và có độ dài bằng $100\sqrt{3}$ N.

TH2: $\widehat{AMB} = 120^0$

Tương tự TH1 ta có: $\vec{F_1} + \vec{F_2} = \overrightarrow{MC}$

Chú ý rằng tam giác AMC đều $\Rightarrow MC = 100$

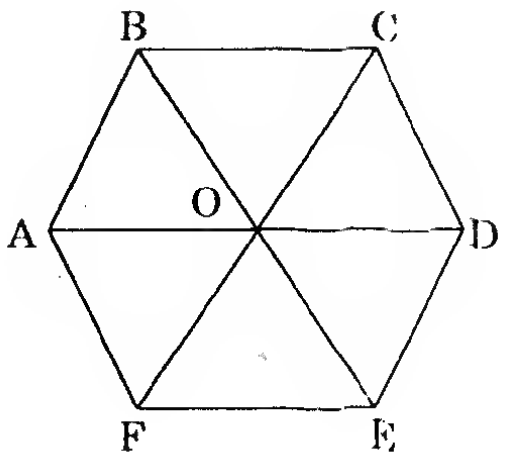
Vậy $\vec{F_3}$ ngược hướng với $\overrightarrow{MC}$ và có độ dài bằng 100N

BÀI TẬP BỔ SUNG

BT9: Cho lục giác đều ABCDEF có tâm O. Chứng minh:

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$

Giải:



Ta có $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE}$

$= \widehat{EOF} = \widehat{FOA} = \dfrac{360^0}{6} = 60^0$

$\Rightarrow \widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = 180^0$

$\Rightarrow$ A, O, D thẳng hàng.

Theo tính chất của đa giác đều OA = OD

Vậy O là trung điểm của AD

Chứng minh tương tự ta có O là trung điểm của các đoạn AD, BE, CF.

$\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$

$= (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}) + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OF})$

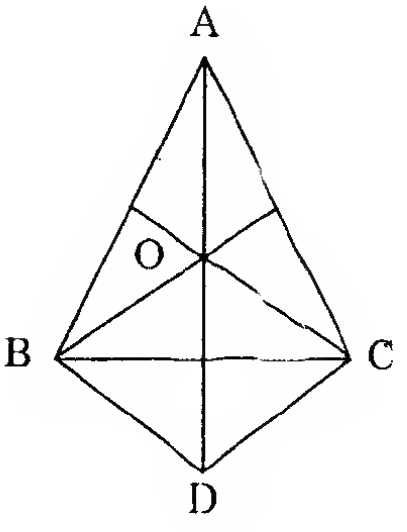
$= \vec{0} + \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.$

BL1: Cho hình bình hành ABCD có tâm O.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$

BL2: Cho tam giác đều ABC có tâm O.

Chứng minh rằng: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$



HD: Dựng vectơ $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ bằng qui tắc hình bình hành (Dựng hình bình hành OBDC)

$\Rightarrow \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$

Hãy chứng minh: $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OA}$.

BL3: Cho bát giác đều (Đa giác đều 8 cạnh) ABCDEFGH có tâm O. Chứng minh:

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OH} = \vec{0}$ (SBT)

BL4: Cho 2n giác đều $A_1A_2...A_{2n}$ ($n \in \mathbf{N}$, $n > 1$) có tâm O, chứng minh:

$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + ... + \overrightarrow{OA_{2n}} = \vec{0}$ (SBT)

BT10: Cho các điểm A, B, C, D, E, F bất kì. Chứng minh:

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$.

HD: Chứng minh: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$ (1)

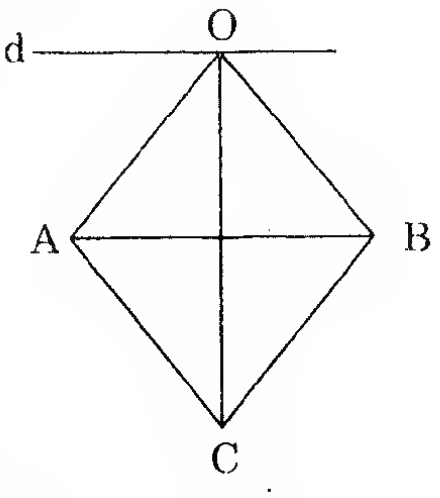
và $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$ (2) bằng các phương pháp đã nêu trorg bài .

BT11: Cho 2 vectơ khác vectơ $\vec{0}$ và không cùng phương: $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$, tìm điều kiện cần và đủ đối với: $\overrightarrow{OA}$ và $\overrightarrow{OB}$ để vectơ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ có giá cùng phương với đường phân giác trong của goc O của tam giác AOB. Khi đó hãy chứng minh rằng vectơ $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ có giá cùng phương với đường phân giác ngoài của góc O của tam giác AOB.

HD: Sử dụng qui tắc hình bình hành để dựng vectơ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ sau đó từ điều kiện $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ có giá cùng phương với đường phân giác trong của góc O của tam giác AOB để tìm điều kiện đối với các yếu tố của 2 vectơ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$.

Giải:

Dựng hình bình hành OACB, ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$



$\overrightarrow{OC}$ có giá cùng phương với đường phân giác trong của góc O của tam giác AOB $\Leftrightarrow$ OC là đường phân giác trong của góc O của tam giác AOB $\Leftrightarrow$ OACB hình thoi $\Leftrightarrow$ OA = OB

Ta có: $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$

Với điều kiện OA = OB, tam giác OAB là tam giác cân có OC là đường phân giác trong nên còn là đường cao $\Rightarrow$ OC $\perp$ AB

Mặt khác 2 đường phân giác trong và ngoài của cùng một góc của tam giác vuông góc nhau

Vì vậy đường phân giác ngoài d của góc O vuông góc với OC

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LE/1617

$\Rightarrow$ AB // d $\Rightarrow$ $\overrightarrow{BA}$ và vì vậy $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ có giá cùng phương với đường phân giác ngoài d của góc O

BT12: Cho 2 điểm A, B (có thể trùng nhau). Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn

a) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$; b) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$;

c) $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{0}$; đ) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$.

Giải:

a. Với mọi M ta có: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$

Vậy tập hợp các điểm M là mọi điểm thuộc mặt phẳng.

b. Với mọi M ta có: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$

Vì vậy: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow A \equiv B$

* Nếu A $\equiv$ B: Tập hợp các điểm M là mọi điểm thuộc mặt phẳng.

* Nếu A $\neq$ B: Không có điểm M thoả mãn.

c. Với mọi M ta có: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$

Vậy: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \vec{0} \Leftrightarrow A \equiv B$

* Nếu A $\equiv$ B: Tập hợp các điểm M là mọi điểm thuộc mặt phẳng.

* Nếu A $\neq$ B: Không có điểm M thoả mãn.

d. Với mọi điểm M ta có: $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}$

Vậy $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \vec{0} \Leftrightarrow M \equiv A$

Vậy tập hợp điểm M là điểm A.

BL1: Cho tứ giác ABCD .Tìm tập những điểm M thoả mãn:

a. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \vec{0}$; b. $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \vec{0}$;

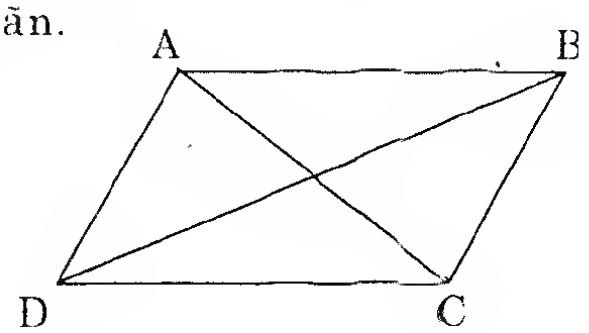
b. $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MB} = \vec{0}$; d. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

HD: Biến đổi các đẳng thức đã cho tương đương với các đẳng thức chứa các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của tứ giác.

a. Với mọi điểm M ta có: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{DB}$

Vì vậy $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{DB}$

Vì AC và DB cắt nhau (2 đường chéo của tứ giác) nên không thể xảy ra $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{DB}$ vậy không có điểm M thoả mãn.



b. Với mọi điểm M ta có:

$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{DC}$

Vì vậy: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ ABCD là hình bình hành

Vậy :

* Nếu ABCD không phải là hình bình hành: Không có điểm M thoả mãn

* Nếu ABCD là hình bình hành thì tập hợp của M là mọi điểm thuộc mặt phẳng

c, d Giải tương tự.

PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Định nghĩa:

Cho số thức $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a}$. Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k||\vec{a}|$.

Qui tắc: $0.\vec{a} = \vec{0}$.

2. Tính chất:

Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và mọi số thực k, l ta có:

a. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k.\vec{a} + k.\vec{b}$

b. $(k + l)\vec{a} = k.\vec{a} + l.\vec{a}$

c. $k(l.\vec{a}) = (k.l)\vec{a}$

d. $1.\vec{a} = \vec{a}$; $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$; $0.\vec{a} = \vec{0}$; $k.\vec{0} = \vec{0}$.

3. Điều kiện để 2 vectơ cùng phương :

a. *Định lí:* Điều kiện cần và đủ để 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ với $\vec{b} \neq \vec{0}$ cùng phương là tồn tại số thực k để $\vec{a} = k.\vec{b}$.

b. Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương, tức là tồn tại số thực $k \neq 0$ để $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC}$.

4. *Định lí:*

Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

Hệ quả: Điểm G là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi với mọi điểm M tuỳ ý ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

BÀI TẬP TRONG SÁCH GIÁO KHOA

BT1: Chứng minh các đẳng thức:

a. $\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$; b. $\vec{a} - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$.

Giải:

a. Ta chứng minh VT bằng VP bằng cách sử dụng các tính chất củ vectơ đã học

$$\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = (\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a}) + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$= (1 - \frac{1}{2})\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).$$

b. $\vec{a} - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = (1 - \frac{1}{2})\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

$$= \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b}).$$

BT2: Tìm số thực k để $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = k(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA})$

HD: Biến đổi về dạng $m\,a = 0$ (*) trong đó m là số đã biết :

Nếu $\vec{a} = \vec{0}$:(*) thoả mãn với mọi m

Nếu $\vec{a} \neq \vec{0}$: (*) $\Leftrightarrow$ m = 0

Giải:

Theo qui tắc 3 điểm ta có:

$\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{DA}$

Vậy $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = k(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA})$

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{DA} = k\overrightarrow{DA} \Leftrightarrow k\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (1 + k)\overrightarrow{DA} = \vec{0}$

* Nếu A ≡ D: (*) thoả mãn với số thực k.

* Nếu A ≠ D: (*) $\Leftrightarrow$ k = −1.

BL1: Cho 4 điểm A, B, C, D phân biệt. Tìm số thực k thoả mãn:

$$k\overrightarrow{AB} + (k - 5)\overrightarrow{CD} + 5\overrightarrow{CA} = 5\overrightarrow{CB}$$

HD: Đẳng thức đã cho $\Leftrightarrow (k - 5)(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \vec{0}$

* Nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0}$: đẳng thức thoả mãn mọi số thực k.

* Nếu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \neq \vec{0}$: k = 5.

BT3: Cho hình bình hành ABCD. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$$

HD: Ta chứng minh VT bằng VP, bằng cách sử dụng qui tắc 3 điểm biến đổi VT để làm xuất hiện vectơ $2\overrightarrow{AC}$ ở VP.

Giải:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$$
$$= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$$
$$= 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD}$$

Ta chỉ cần chứng minh $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$. Thật vậy:

Vì ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC} + \vec{0} = 2\overrightarrow{AC}$

Bạn đọc hãy dùng các phương pháp khác để chứng minh đẳng thức trên

Chú ý: Qui tắc 3 điểm có thể mở rộng như sau: Cho n điểm bất kì ta luôn có: $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$

VD: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$

BT4: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD của tứ giác ABCD. Chứng minh rằng:

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}.$$

Giải:

Ta chứng minh $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}$

Sử dụng qui tắc 3 điểm "mở rộng" biến đổi VT, xen các điểm M, N một cách thích hợp để xuất hiện vectơ $\overrightarrow{MN}$ ở VP

Ta có: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}$

Vì M, N là trung điểm của AB và CD nên:

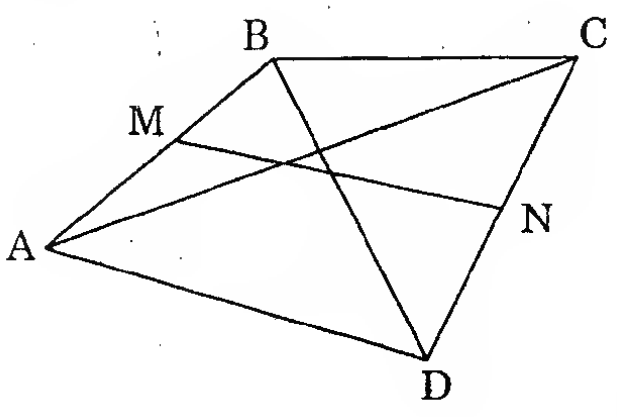
$\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{AM} = \vec{0}$, $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{MN}$

Tương tự:

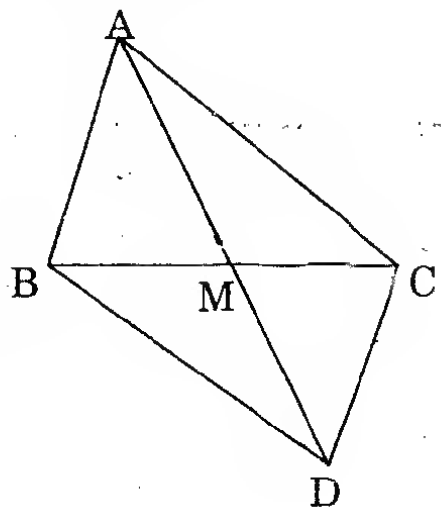
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC}$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND}$



$\Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND} = 2\overrightarrow{MN}$.

BL1: Cho 3 điểm ABC. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$.



Giải:

Cách 1: Sử dụng qui tắc 3 điểm ta có:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$

Do M là trung điểm BC nên $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$.

Cách 2: Sử dụng qui tắc hình bình hành

Vẽ hình bình hành ABDC, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

Mặt khác $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$

Bạn đọc hãy học thuộc kết quả trên để thuận tiện trong việc giải toán

BL2: Hãy áp dụng kết quả của BL1 để chứng minh các bài toán sau:

a. Gọi M, N, P, G lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA và trọng tâm của tam giác ABC.

Chứng minh: $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CM} = 0$

Từ đó suy ra $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

BT5: Trên đường thẳng chứa cạnh BC của tam giác ABC ta lấy một điểm M sao cho $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$

Hãy tính vectơ $\overrightarrow{AM}$ theo các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$

HD: Từ $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}$, sử dụng tính chất phép trừ vectơ, xen điểm A để xuất hiện vectơ $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$

Giải:

Theo tính chất của phép trừ vectơ ta có:

$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}$

Vì vậy: $\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AM}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

BL1: Cho 2 điểm B, C. Ta lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{MB} = k\overrightarrow{MC}$ $(k \neq 1)$. Chứng minh rằng với mọi điểm A ta có: $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}}{1-k}$.

BT6: Chứng minh rằng nếu G, G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và A'B'C' thì $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$.

HD: Ta chứng minh VP bằng VT bằng cách sử dụng qui tắc 3 điểm "mở rộng" xen 2 điểm G, G' để xuất hiện vectơ $\overrightarrow{GG'}$, sau đó sử dụng tính chất của trọng tâm của tam giác để suy ra đẳng thức cần chứng minh.

Giải:

Theo qui tắc 3 điểm:

$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'}$, $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'}$, $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) + 3 + (\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'})$

Vì G, G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và A'B'C' nên

$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$, $\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = \vec{0}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$.

BL1: Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để 2 tam giác ABC và A'B'C' có cùng trọng tâm là $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

HD: Sử dụng kết BL4 ta có $\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$.

Chú ý: Đây là kết quả quan trọng để chứng minh 2 tam giác có cùng trọng tâm

BL2: Cho tam giác ABC; M, N, P lần lượt thuộc cạnh AB, BC, CA sao cho AM = 2MB, BN = 2NC, CP = 2PA. Chứng minh rằng 2 tam giác ABC và MNP có cùng trọng tâm.

HD: Hãy chứng minh $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$.

BT7: Gọi AM là trung tuyến của tam giác ABC và D là trung điểm của AM. Chứng minh rằng

a. $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.

b. Với điểm O bất kì ta có: $2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OD}$.

HD: a. Giả thiết AM là trung tuyến của tam giác ABC (M là trung điểm của BC), gợi ý cho ta sử dụng công thức $2\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$

Giải:

a. Vì M là trung điểm của BC ta có $2\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$ (1)

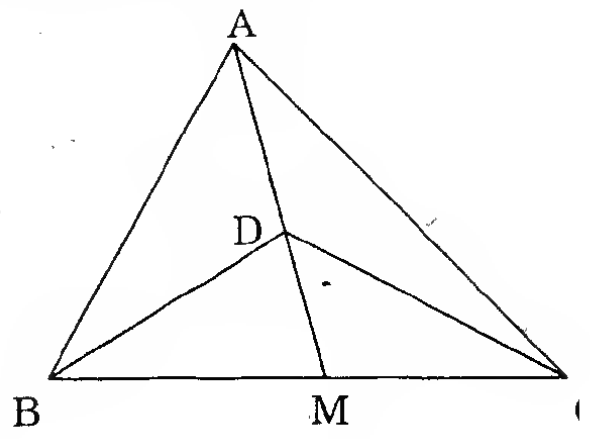
Lại do D là trung điểm của AB ta có:

$\overrightarrow{DM} = -\overrightarrow{DA}$

Thế vào (1) ta có

$-2\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$.



b. Sử dụng qui tắc 3 điểm của phép trừ vectơ, xen điểm O vào các vectơ có mặt trong đẳng thức ở câu a, ta có đpcm.

$2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - 4\overrightarrow{OD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OD}$.

BL1: Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC. D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AD} = -2\overrightarrow{AM}$. Tính vectơ $\overrightarrow{DA}$ theo $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$.

BT8: Cho tam giác ABC và điểm O. Chứng minh rằng nếu ta có $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ thì O là trọng tâm của tam giác ABC.

HD: Sử dụng định lí: Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ta chứng minh G ≡ O.

Giải:

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Theo giả thiết của bài toán

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GC}) =$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{OG} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{OG} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \vec{0} \Leftrightarrow O \equiv G.$

Chú ý: Từ kết quả bài toán trên bạn đọc hãy chứng minh định lí sau:

Điều kiện cần và đủ để G là trọng tâm của tam giác ABC là $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

BL1: Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD của tứ giác ABCD, G là trung điểm của MN. Chứng minh rằng

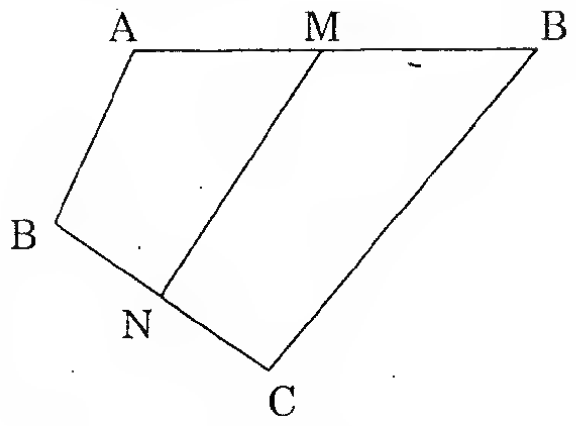
a. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

b. Với mọi điểm O bất kì ta có: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$

c. Chứng minh rằng nếu có 2 điểm O, G' sao cho:

$\overrightarrow{OG'} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ thì G' là trung điểm của MN (SBT).

Giải:



a. Sử dụng kết quả của BL1 của BT4:

Ta có: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{GM}$

$\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GN}$

$\Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GM} + 2\overrightarrow{GN}$

$= 2(\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GN}) = \vec{0}$

b. Từ đẳng thức ở câu a, sử dụng qui tắc 3 điểm của phép trừ, xen điểm O ta có đẳng thức cần chứng minh.

c. Hãy chứng minh G' ≡ G bằng cách sử dụng câu b.

> ***Chú ý:*** Điểm G ở bài toán trên được gọi là trọng tâm của tứ giác ABCD.

BL: Cho 2 tứ giác ABCD và $A_0B_0C_0D_0$ lần lượt có trọng tâm G, G_0. Chứng minh rằng $G \equiv G_0$ khi và chỉ khi:

$$\overrightarrow{AA_0} + \overrightarrow{BB_0} + \overrightarrow{CC_0} + \overrightarrow{DD_0} = \vec{0}.$$

HD: Sử dụng $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$, $\overrightarrow{G_0A_0} + \overrightarrow{G_0B_0} + \overrightarrow{G_0C_0} + \overrightarrow{G_0D_0} = ($

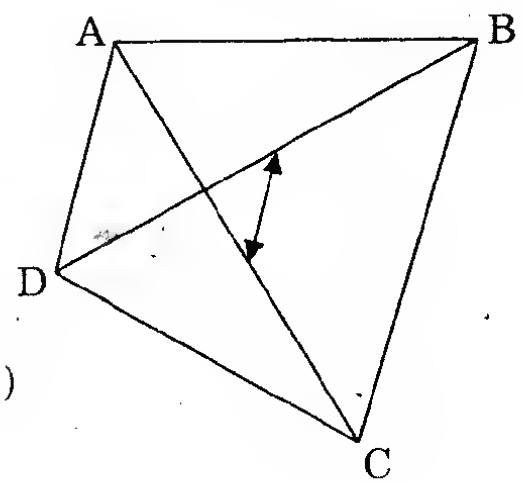
Biến đổi

$\overrightarrow{AA_0} + \overrightarrow{BB_0} + \overrightarrow{CC_0} + \overrightarrow{DD_0} = (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DG}) +$

$+ (\overrightarrow{G_0A_0} + \overrightarrow{G_0B_0} + \overrightarrow{G_0C_0} + \overrightarrow{G_0D_0}) + 4\overrightarrow{GG_0}.$

BT9: Gọi I, J lần lượt là trung điểm hai đường chéo AC, BD của tứ giác ABCD. Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{IJ}$

Giải:



Giải tương tự bài toán 4. Ta có:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JB}$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JD}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{CI}) + 2\overrightarrow{IJ} + (\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JD})$

$= 2\overrightarrow{IJ}$

BL1: Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và DEF của lục giác ABCDEF. Chứng minh rằng trên MN tồn tại duy nhất điểm G thỏa mãn:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GF}=\vec{0}.$$

HD: Tính $\overrightarrow{GM}$ theo $\overrightarrow{GN}$

BT10: Gọi M là một điểm trên cạnh BC của tam giác ABC sao cho $\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

HD: Nhận xét biểu thức cần chứng minh chứa các vectơ có điểm đầu là điểm A, vì vậy từ đẳng thức ở giả thiết bài toán, xen điểm A theo qui tắc 3 điểm của phép trừ vectơ ta có đẳng thức cần chứng minh.

Giải:

Theo qui tắc 3 điểm của phép trừ vectơ ta có:

$$\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$

BL1: Cho tam giác ABC, M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MB}=-3\overrightarrow{MC}$, D là điểm trung điểm AD. Tính $\overrightarrow{DA}$ theo $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$.

HD: Giải tương tự bài 10, ta tính $\overrightarrow{DM}$ theo $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ sau đó tính $\overrightarrow{DM}$ theo $\overrightarrow{DA}$.

BL2: Cho tam giác ABC, M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MB}=-3\overrightarrow{MC}$. D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AD}=-2\overrightarrow{AM}$. Tính vec tơ $\overrightarrow{DA}$ theo $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$.

HD:

Từ giả thiết $\overrightarrow{MB}=-3\overrightarrow{MC}$, hãy tính $\overrightarrow{DM}$ theo $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$.

Từ $\overrightarrow{AD}=-2\overrightarrow{AM}$, tính $\overrightarrow{DM}$ theo $\overrightarrow{DA}$

Từ 2 đẳng thức thu được ở trên ta có: $\overrightarrow{DA}=\frac{1}{6}(\overrightarrow{DB}+3\overrightarrow{DC})$.

BT11: Cho tam giác ABC. Tìm điểm M sao cho:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=\vec{0}.$$

Giải:

Cách 1: Gọi I là trung điểm của AB ta có: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Vậy M là trung điểm của IC

Cách 2: Lấy điểm O bất kì ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) + 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}) = \vec{0}$

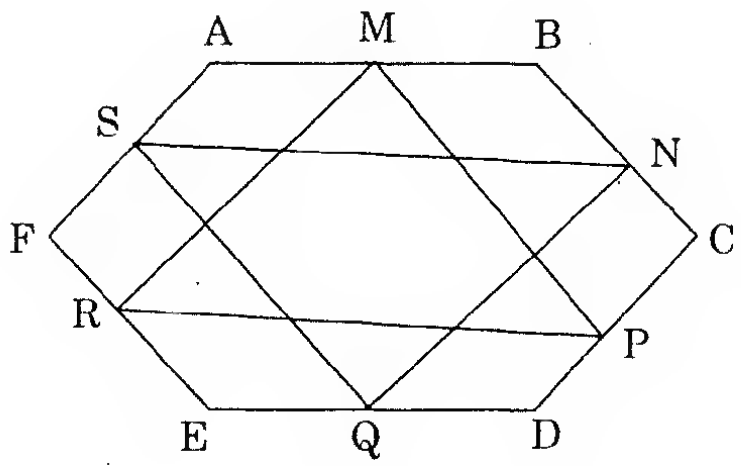
$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC})$

Để đơn giản chọn O là trung điểm của AB ta có: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$.

BT12: Cho lục giác ABCDEF. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác MPR và NQS có cùng trọng tâm.

HD: Sử dụng BL1 của BT6 ta chứng minh

$\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \vec{0}$.



Giải:

RS là đường trung bình của tam giác FEA, ta có :

$\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$

Tương tự: $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CE}$

$\Rightarrow \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE})$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{EE} = .$

BT13: Cho 2 điểm A, B cố định và 2 số m, n với $m + n \neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I trên đường thẳng AB sao cho

$m\overrightarrow{IA} + n\overrightarrow{IB} = \vec{0}$. (SBT)

Giải:

$m\overrightarrow{IA} + n\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow m\overrightarrow{IA} + n(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow (m + n)\overrightarrow{IA} = -n.\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow (m + n)\overrightarrow{AI} = n.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{AB}$

Đẳng thức cuối cùng chứng tỏ tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn đẳng thức đã cho.

BL1: Cho 3 điểm A, B, C và 3 số thức m, n, p sao cho $m + n + p \neq 0$. Chứng minh rằng tồn tại điểm I duy nhất thỏa mãn: $m.\overrightarrow{IA} + n.\overrightarrow{IB} + p.\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

HD: Tính $\overrightarrow{IA}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ để kết luận

$$\overrightarrow{AI} = \frac{n}{m+n+p}\overrightarrow{AB} + \frac{p}{m+n+p}\overrightarrow{AC}.$$

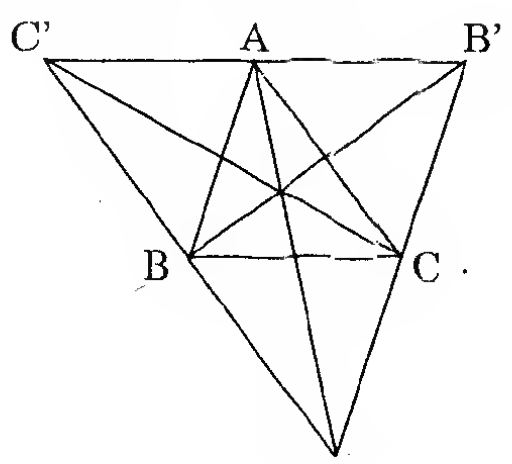
BÀI TẬP BỔ SUNG

BT14: Cho tam giác ABC. Dựng $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CA}$

a) Chứng minh rằng A là trung điểm B'C'.

b) Chứng minh các đường thẳng AA', BB', CC' đồng qui (SBT).

Giải:



a. $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow AB' // BC$ và $AB' = BC$ (1)

$\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CA}$

$\Rightarrow AC' // BC$ và $AC' = BC$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow$ A là trung điểm của B'C'.

b. Chứng minh tương tự ta có:

A là trung điểm của B'C', C là trung điểm B'A', B là trung điểm A'C'.

$\Rightarrow$ AA', BB', CC là các đường trung tuyến của tam giác A'B'C, vì vậy AA', BB', CC' đồng qui.

BT15: a. Chứng minh rằng nếu 3 điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng thì có một số thực k sao cho $\overrightarrow{MC} = (1 - k)\overrightarrow{MA} + k.\overrightarrow{MB}$ với M là một điểm bất kì (SBT).

b. Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{MC} = (1 - k)\overrightarrow{MA} + k.\overrightarrow{MB}$ thì 3 điểm A, B, C thẳng hàng (SBT).

Giải:

a. Vì A, B phân biệt nên $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$,

Mặt khác $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ cùng phương

Nên theo định lí về sự phân tích một vectơ theo một vectơ cùng phương khác vectơ không, tồn tại duy nhất số thực k sao cho:

$$\overrightarrow{AC} = k.\overrightarrow{AB}$$

Với mọi điểm M ta có: $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA} = k(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MB} - k.\overrightarrow{MA}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} - k.\overrightarrow{MA} + k.\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = (1-k)\overrightarrow{MA} + k.\overrightarrow{MB}$

b) Theo cách chứng minh câu a, từ đẳng thức đã cho ta suy ra:

$\overrightarrow{AC} = k.\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AC}$ cùng phương $\overrightarrow{AB} \Rightarrow$ 3 điểm A, B, C thẳng hàng.

Chú ý:

1. Từ kết quả bài toán trên, kết hợp với lí thuyết ta có 2 cách để chứng minh 3 điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng :

Cách 1: Chứng minh $\overrightarrow{AC} = k.\overrightarrow{AB}$.

Cách 2: Chứng minh $\overrightarrow{MC} = (1-k)\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}$ (*) với M là 1 điểm nào đó.

2. Để ý rằng tổng các "hệ số" $(1-k) + k = 1$, vì vậy bài toán 3 có thể phát biểu lại như sau:

Nếu có điểm M sao cho $\overrightarrow{MC} = m.\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB}$ với m, n là 2 số thực thỏa mãn $m + n = 1$ thì 3 điểm A, B, C thẳng hàng.

BL1: Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của AM. N là điểm thỏa mãn $m\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$. Xác định m để B, I, N thẳng hàng.

Giải:

Vì M là trung điểm BC nên ta có : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$ (1)

Mặt khác : $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{AC} = m.\overrightarrow{AN}$ thế vào (1) ta có

$\overrightarrow{AB} + m.\overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AI} - m.\overrightarrow{AN}$

A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow 4 - m = 1 \Leftrightarrow m = 3$.

BL2: Cho tam giác ABC. M là trung điểm của BC. I là điểm thỏa mãn $4\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AM}$. Gọi N, P lần lượt là giao điểm của BI với AC, của CI với AB. Tính $\overrightarrow{AN}$ theo $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AP}$ theo $\overrightarrow{AB}$

BL3: Cho tam giác ABC, M là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CM}$, N là trung điểm của AC, I là giao điểm của AM và BN. Tính $\overrightarrow{AI}$ theo $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{BI}$ theo $\overrightarrow{BN}$.

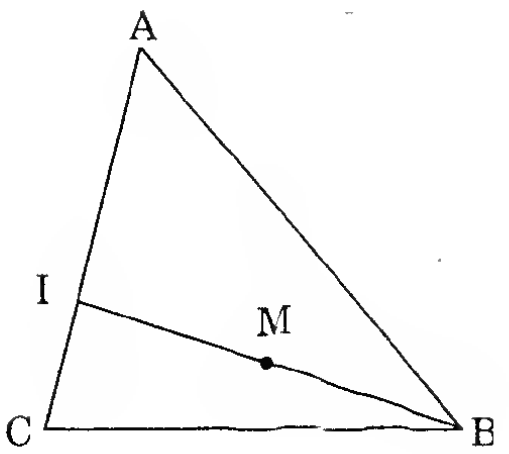
BT16: Cho tam giác ABC. Tìm điểm M sao cho: $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 0$

HD: Tương tự như bài 11 ta tìm điểm I sao cho:

$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MI} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = 3\overrightarrow{MI}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IB}$ (Điểm I thuộc đoạn AB và IA = 2IB).

Giải:



Lấy điểm I sao cho $\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IB}$

$\overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI} = -2(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MI})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MI}$

Từ đó: $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MI} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

Vậy M là trung điểm của IC.

Có thể giải một cách tự nhiên hơn như sau:

Lấy điểm O cố định tùy ý ta có:

$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}) + 2(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) + 3(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC})$

Chọn O sao cho $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} = \vec{0}$, ta có: $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$

BL1: Cho tam giác ABC. Tìm điểm M sao cho : $\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

HD: Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 4\overrightarrow{IB} = \vec{0}$, hãy tính $\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB}$ theo $\overrightarrow{MI}$ bằng qui tắc 3 điểm

BT17: Cho tam giác ABC

a. Chứng minh rằng không tồn tại điểm M thỏa mãn $m\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ trong đó m, n không đồng thời bằng 0 và $m + n = 0$

b. Chứng minh rằng $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ không phụ thuộc vào vị trí của M (SBT)

c. Chứng minh rằng không tồn tại điểm M thỏa mãn

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

d. Chứng minh rằng không tồn tại điểm M thỏa mãn

$$\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

HD:

a. Giả sử tồn tại điểm M, Biến đổi đẳng thức đã cho ta đi đến $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ (vô lí).

b. Gọi I là trung điểm AB ta có:

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} \Rightarrow \vec{u} = 2\overrightarrow{MI} - 2\overrightarrow{MC} = 2(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MC}) = 2\overrightarrow{CI}$.

c. Dựa vào câu b.

d. Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 4\overrightarrow{IB} = \vec{0}$, ta đi đến $5\overrightarrow{MI} - 5\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CI} = \vec{0}$ (vô lí).

BT18: Cho tứ giác ABCD. Gọi O là điểm thỏa mãn

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$; G là trọng tâm của tam giác ABC.

Chứng minh rằng O, G, D thẳng hàng.

HD: Sử dụng đẳng thức về trọng tâm $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$.

BT19: cho tam giác ABC. M là trung điểm của BC, N là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{NA} = -2\overrightarrow{NC}$, I là giao điểm của AM và BN chứng minh:

a. $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + 4\overrightarrow{IM}$; $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IN}$.

b. $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

c. Tính $\overrightarrow{IB}$ theo $\overrightarrow{IN}$.

d. Tính $\overrightarrow{IM}$ theo $\overrightarrow{IA}$ theo $\overrightarrow{IM}$.

Giải:

a. Vì M là trung điểm của BC ta có:

$\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{IM}$

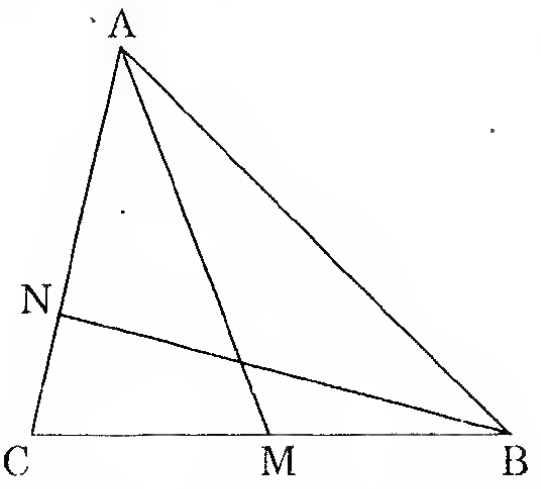
Cộng 2 vế cho $\overrightarrow{IA}$ ta có: $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + 4\overrightarrow{IM}$

Mặt khác ta có:

$\overrightarrow{NA} = -2\overrightarrow{NC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IN} = -2(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IN})$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IN} = -2\overrightarrow{IC} + 2\overrightarrow{IN}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IN}$



Cộng 2 vế cho $2\overrightarrow{IB}$ ta có:

$\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IN}$.

b. Ta có $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + 4\overrightarrow{IM}$

Vì $\overrightarrow{IA} + 4\overrightarrow{IM}$ cùng phương với $\overrightarrow{IA}$ (vì 2 vectơ $\overrightarrow{IA}$ và $4\overrightarrow{IM}$ cùng phương)

$\Rightarrow \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC}$ cùng phương với $\overrightarrow{IA}$ (1)

$\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IN}$

Vì $2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IN}$ cùng phương với $\overrightarrow{IB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC}$ cùng phương với $\overrightarrow{IB}$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC}$ cùng phương với $\overrightarrow{IB}$ và $\overrightarrow{IA}$ là 2 vectơ khác phương $\Rightarrow \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

c. Theo cách chứng minh câu b

$\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IN} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{IN}$.

· ***Chú ý:*** Sử dụng tính chất đặc trưng của vectơ không: Một vectơ cùng phương với 2 vectơ khác phương thì vectơ đó là vectơ không.

Để chứng minh biểu thức vectơ $\vec{V}$ bằng vectơ không ta chứng minh $\vec{V} = \vec{a}$ và $\vec{V} = \vec{b}$. Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là 2 vectơ khác phương.

BL1: Cho tam giác ABC có AB = c, AC = b, BC = a.

a. Gọi D, E lần lượt là chân đường phân giác trong AD, BE. Hãy tính $\overrightarrow{DB}$ theo $\overrightarrow{DC}$ và a, b, c. Tính $\overrightarrow{EA}$ theo $\overrightarrow{EC}$ và a, b, c.

b. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tính $a.\overrightarrow{IA} + c.\overrightarrow{IC}$ theo $\overrightarrow{IE}$, tính $b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC}$ theo $\overrightarrow{ID}$.

c. Chứng minh $a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

HD: a. Theo tính chất đường phân giác trong ta có:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b} \text{ và D nằm giữa B và C} \Rightarrow \overrightarrow{DB} = -\frac{c}{b}\overrightarrow{DC} \quad (*)$$

b. Từ $(*) \Rightarrow b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = (b + c)\overrightarrow{ID}$;

Cộng 2 vế cho $a\overrightarrow{IA}$ ta có: $a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = (b + c)\overrightarrow{ID} + a.\overrightarrow{IA}$ (1)

Tương tự: $a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = (c + a)\overrightarrow{IE} + b.\overrightarrow{IB}$ (2)

c. (1) và (2) lí luận tương tự như BT5 ta có ĐPCM.

TÍCH VÔ HƯỚNG

TÓM TẮT LÍ THUYẾT:

I. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC α ($0^0 \le \alpha \le 180^0$)

1. Định nghĩa:

a. $\sin 0^0 = 0$; $\cos 0^0 = 1$, $\text{tg}0^0 = 0$; $\text{cotg}0^0$ không xác định;

$\sin 90^0 = 1$; $\cos 90^0 = 0$; $\text{cotg}90^0 = 0$, $\text{tg}90^0$ không xác định;

b. Cho góc $\alpha = \widehat{xOy}$. Gọi Ox' là tia đối của tia Ox. Khi đó góc x'Oy có số đo là $(180^0 - \alpha)$.

Định nghĩa:

$\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha)$; $\cos\alpha = -\cos(180^0 - \alpha)$;

$\text{tg}\alpha = -\text{tg}(180^0 - \alpha)$; $\text{cotg}\alpha = -\text{cotg}(180^0 - \alpha)$.

2. Góc giữa 2 hai vectơ

Định nghĩa: Cho hai vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$. Lấy điểm O tùy ý, vẽ vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Góc $\widehat{AOB}$ được gọi là góc giữa 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $(\vec{a}, \vec{b})$

Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^0$ thì ta nói $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc nhau và kí hiệu $\vec{a} \perp \vec{b}$.

II. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA 2 VECTƠ

1. Định nghĩa: Tích vô hướng của 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số kí hiệu $\vec{a}.\vec{b}$ được xác định bởi công thức: $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

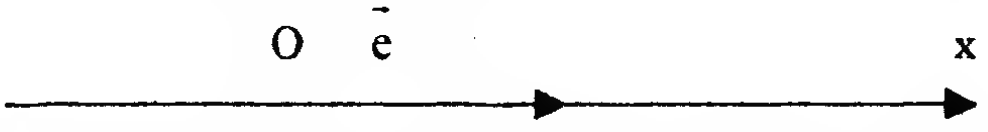
2. Hai trường hợp đặc biệt:

a. Số $\vec{a}.\vec{a}$ kí hiệu $\vec{a}^2$, gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$. Công thức $\vec{a}^2$ dùng để tính độ dài của đoạn thẳng $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

b. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc nhau khi và chỉ khi $\vec{a}.\vec{b} = 0$.

3. Trục và độ dài trên trục

a. Một đường thẳng được gọi là một trục nếu trên đó đã chọn một điểm làm gốc O và một vectơ $\vec{e}$ có độ dài bằng 1 được gọi là vectơ đơn vị của trục. Ta kí hiệu $(O, \vec{e})$ hoặc Ox.

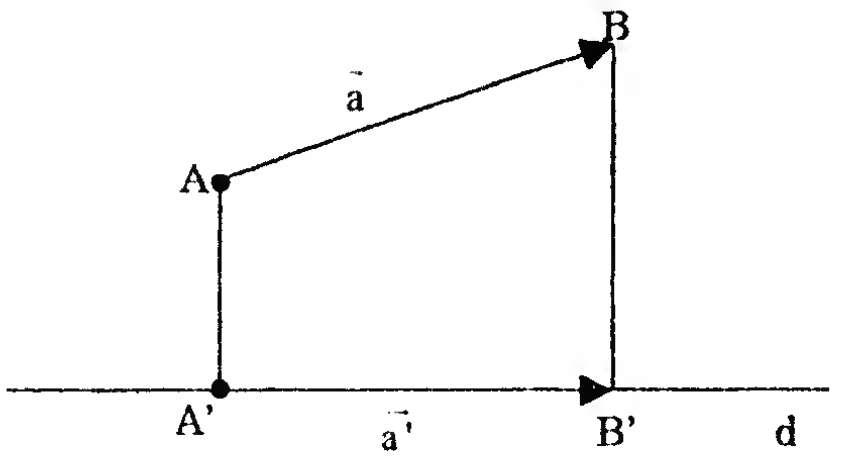


b. Cho M là một điểm tùy ý trên trục $(O, \vec{e})$. Khi đó sẽ có số k sao cho $\overline{OM} = k.\vec{e}$. Số k được gọi là tọa độ của điểm M đối với trục đã cho.

c. Cho 2 điểm A và B trên trục (O, e). Số m sao cho $AB = m e$ gọi là độ dài đại số của vectơ $\overline{AB}$ đối với trục đã cho và kí hiệu $m = \overline{AB}$.

4. Công thức hình chiếu :

Định nghĩa: Cho đường thẳng d và vectơ $\vec{a} = \overline{AB}$, A' và B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B lên d. Khi đó vectơ $\vec{a'} = \overline{A'B'}$ được gọi là hình chiếu vuông góc của $\vec{a}$ lên d.



* Công thức: Cho 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Gọi $\vec{b'}$ là hình chiếu của $\vec{b}$ lên giá của $\vec{a}$. Khi đó $\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}.\vec{b'}$

5. Các tính chất của tích vô hướng:

Với mọi vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ và số thực k ta có:

$\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ $\qquad$ $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

$(k.\vec{a})\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}(k.\vec{b})$ $\qquad$ $\vec{a}^2 \geq 0. \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

Các công thức cần nhớ:

$(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} + 2\vec{a}.\vec{b}$ $\qquad$ $(\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^{\,2} + \vec{b}^{\,2} - 2\vec{a}.\vec{b}$

$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^{\,2} - \vec{b}^{\,2}$.

BÀI TẬP TRONG SÁCH GIÁO KHOA

BT1: Tính tỉ số lượng giác của góc sau đây :

a) 60^0 $\qquad$ b)120^0 $\qquad$ c)150^0 $\qquad$ d)135^0

HD: Sử dụng công thức $\sin\alpha = \sin(180^0 - \alpha)$; $\cos\alpha = -\cos(180^0 - \alpha)$; $\text{tg}\alpha = -\text{tg}(180^0 - \alpha)$; $\text{cotg}\alpha = -\text{cotg}(180^0 - \alpha)$ biến đổi về tỉ số lượng giác của góc đã biết.

Giải:

a. Xem bảng tỉ số lượng giác của góc đặc biệt.

b. $\sin120^0 = \sin(180^0 - 120^0) = \sin60^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

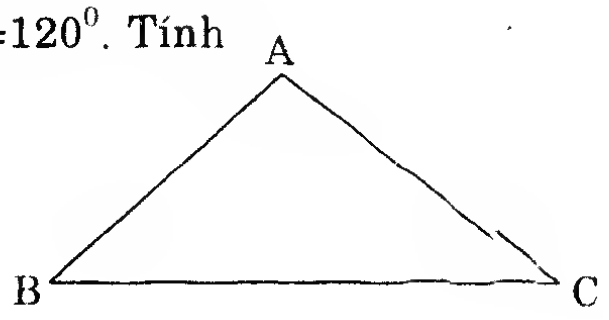
$\cos120^0 = -\cos(180^0 - 120^0) = -\cos60^0 = -\dfrac{1}{2}$

$\text{tg}120^0 = -\text{tg}(180^0 - 120^0) = -\text{tg}60^0 = -\sqrt{3}$

$\text{cotg}120^0 = -\text{cotg}(180^0 - 120^0) = -\text{cotg}60^0 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

c, d, giải tương tự

BT2: Cho tam giác ABC có AB = AC = a, $\hat{A} = 120^0$. Tính



a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$;

b. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$;

Giải:

a. ΔABC có $A = 120^0 \Rightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CA}) = 60^0$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} = AB.CA\cos60^0 = a.a\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}a^2$

b. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{BC}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BC}^{\,2} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$

Ta có: $\overrightarrow{BC}^{\,2} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^{\,2} - 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

$= a^2 + a^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} = 2a^2 + 2\dfrac{1}{2}a^2 = 3a^2$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{AB} = -3a^2 + \frac{1}{2}a^2 = -\frac{5}{2}a^2.$

BT3: Tính độ dài các cạnh của tam giác ABC biết:

$\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{e_1} - 4\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2}$, $|\overrightarrow{e_1}| = |\overrightarrow{e_2}| = 1$ và $\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2}$.

HD: Sử dụng các công thức:

$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}.\vec{b}$;

$(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}.\vec{b}$;

$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}^2$.

Giải:

$\overrightarrow{AB}^2 = (3\overrightarrow{e_1} - 4\overrightarrow{e_2})^2 = (3\overrightarrow{e_1})^2 + (4\overrightarrow{e_2})^2 - 2(3\overrightarrow{e_1})(4\overrightarrow{e_2})$

$= 9\overrightarrow{e_1}^2 + 16\overrightarrow{e_2}^2 - 24\overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_2} = 9.1 + 16.1 - 24.0 = 25$

(Do $\overrightarrow{e_1} \perp \overrightarrow{e_2}$ nên $\overrightarrow{e_1}\,\overrightarrow{e_2} = 0$)

$\Rightarrow AB = 5.$

Tính tương tự ta có: $\overrightarrow{BC}^2 = 26 \Rightarrow BC = \sqrt{26}$ (Bạn đọc hãy tính chi tiết)

$\overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 25 + 26 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

$= 51 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

Ta tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC} = (3\overrightarrow{e_1} - 4\overrightarrow{e_2})(\overrightarrow{e_1} + 5\overrightarrow{e_2})$

$= 3\overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_1} + 15\overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_2} - 4\overrightarrow{e_2}.\overrightarrow{e_1} - 20\overrightarrow{e_2}.\overrightarrow{e_2}$

$= 3\overrightarrow{e_1}^2 + 15.0 - 4.0 - 20\overrightarrow{e_2}^2 = 3 - 20 = -17$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}^2 = 51 - 34 = 17 \Rightarrow AC = \sqrt{17}$.

BT4: Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tính các tích vô hướng sau đây:

a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$;

b. $\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$

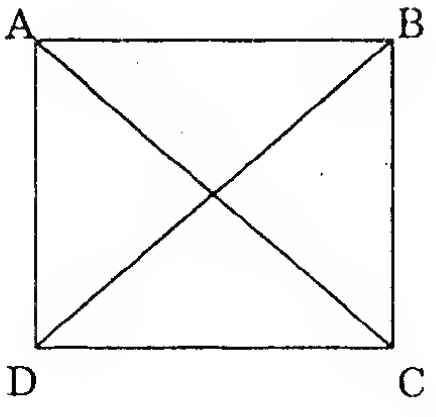
c. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA})$.

Giải:

a. Ta tính độ dài các đường chéo AC,BD Sử dụng định lí Pitago vào các tam giác vuông ta có::

$AC = BD = a\sqrt{2}$,

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 45^0$



$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC} = ABAC\cos 45^0 = aa\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = a^2.$

Có thể tính bằng 2 cách khác như sau:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$

$= AB^2 = a^2$ (Do $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0$)

Sử dụng công thức hình chiếu ta thấy $\overrightarrow{AB}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{AC}$ lên đường thẳng AB là giá của $\overrightarrow{AB}$ vậy : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB^2 = a^2$

b. $\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = a^2 + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$

Để tính $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$ bạn đọc có thể sử dụng 3 cách đã trình bày ở câu a, ta có:

$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = a^2$ (Bạn đọc hãy chứng minh chi tiết)

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = 2\,a^2.$

c. $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA})$

Ta có: $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BD}$

$\Rightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BA}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(2\overrightarrow{BD})$

$= 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} + 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$ (do $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$)

$= 2a.a\sqrt{2}\cos 135^0 = -2a^2.$

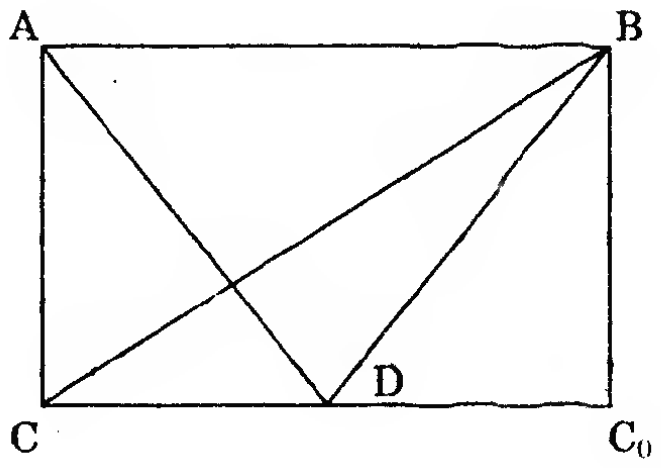
BT5: Hình thang vuông ABCD có đường cao AB = 3a, đáy AD = 2a và BC = 4a. Tính các tích vô hướng:

a. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$ b. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$ c. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}$

Giải:

Dựa vào góc vuông có mặt trong hình vẽ để sử dụng công thức hình chiếu a. Ta thấy rằng $\overrightarrow{AB}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{AC}$ lên AB

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = 9a^2.$



b. Gọi $\overrightarrow{AC_0}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{AC}$ lên đường thẳng AD, ta dễ thấy rằng

$\overrightarrow{AC_0} = \overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC_0}.\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD}$

$= 4a.2a = 8a^2.$

c. Ta có $\overrightarrow{BA}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{BD}$ lên đường thẳng BA

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}^2 = -9a^2.$

BL1: Cho 2 vectơ $\vec{a}, \vec{b}$; d là đường thẳng song song với giá của $\vec{a}$; $\vec{b'}$ là hình chiếu vuông góc của $\vec{b}$ lên d. Chứng minh rằng: $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{a}\,\vec{b'}$.

BL2: Đề bài như bài 5 trong phần này

a. Hãy tính $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$;

b. Gọi I là trung điểm của CD. Tính $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BD}$.

HD:

a. $\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})$.

b. $\overrightarrow{AI}\,\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})$.

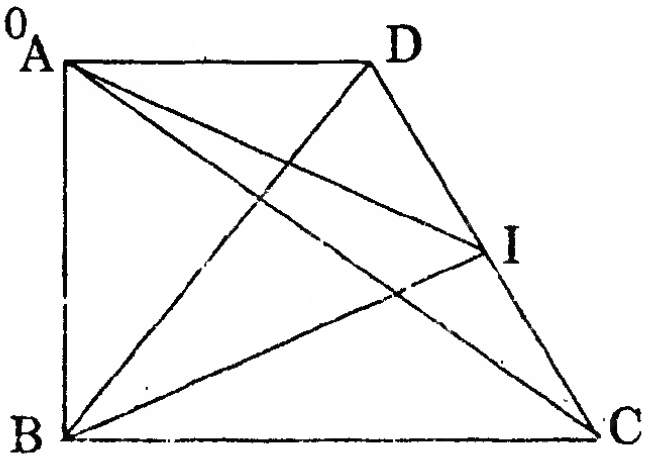
BL3: Cho hình thang vuông ABCD, đường cao AB = h, AD = a, BC = b

a. Cho a = 2, b = 8, h = 4. Chứng minh: AC ⊥ BD.

b. Tìm điều kiện của a, b, h để $\widehat{AIB} = 90^0$ với I là trung điểm của CD.

HD:

a. Ta tính tích vô hướng $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$ theo tích vô hướng của các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, để chứng minh $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$



b. $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

$\overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$

$\widehat{AIB} = 90^0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BI} = 0$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BD} = 0$

Tính các tích vô hướng $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BD}$ dựa vào công thức hình chiếu và $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})$ ta đi đến kết quả:

$\widehat{AIB} = 90^0 \Leftrightarrow a + b = h$.

BT6: Cho tam giác ABC có BC = a, AB = c, CA = b. Chứng minh rằng:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}.$$

Giải:

Ta chứng minh bằng phương pháp tương đương

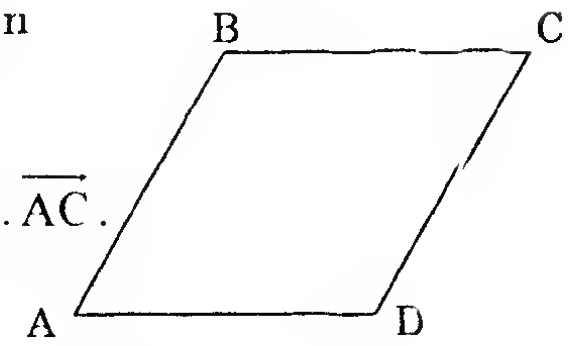
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = b^2 + c^2 - a^2 \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{BC}^2$

Đẳng thức cuối cùng đúng vậy đẳng thức cần chứng minh đúng.



Có thể chứng minh trực tiếp như sau:

$\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}.$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh

BL1: Cho hình bình hành ABCD. Hãy chứng minh rằng:

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2).$$

HD: Sử dụng

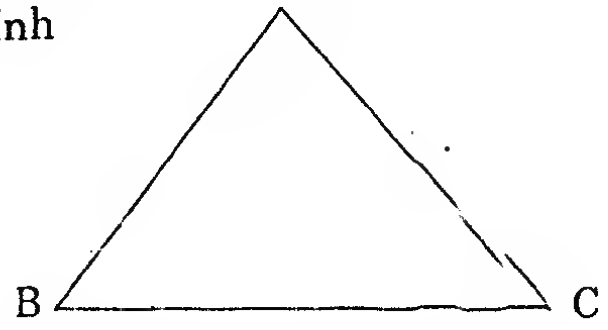
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

Bình phương vô hướng 2 vế, sau đó cộng 2 đẳng thức nhận được vế theo vế ta được đẳng thức cần chứng minh với chú ý rằng:

$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{BC}\,\vec{0} = \vec{0}$

BT7: Tam giác vuông cân có AB = AC = a. Tính



a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$,

b. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$.

HD:

a. $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

b. $\overrightarrow{CA}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{CB}$ lên đường thẳng AC là giá của $\overrightarrow{AC}$.

BT8: Đoạn thẳng AB = 2a có I là trung điểm

a. Với điểm M tùy ý hãy tính $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ theo a và MI.

b. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = a^2$.

Giải:

a. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA})$

(đo $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$)

$$= \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = MI^2 - a^2$$

b. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = a^2 \Leftrightarrow MI^2 - a^2 = a^2 \Leftrightarrow MI^2 = 2a^2$

M cách I cố định một khoảng không đổi $a\sqrt{2} > 0$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = a\sqrt{2}$.

BL1: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn:

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = 0.$$

HD: Gọi E, F lần lượt là trung điểm AB, AC ta có:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{ME};\ \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MF}$$

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{ME} \perp \overrightarrow{MF}$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính bằng EF.

Chú ý:

* Cho 2 điểm cố định A, B tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}\ \overrightarrow{MB} = 0$ là đường tròn đường kính AB

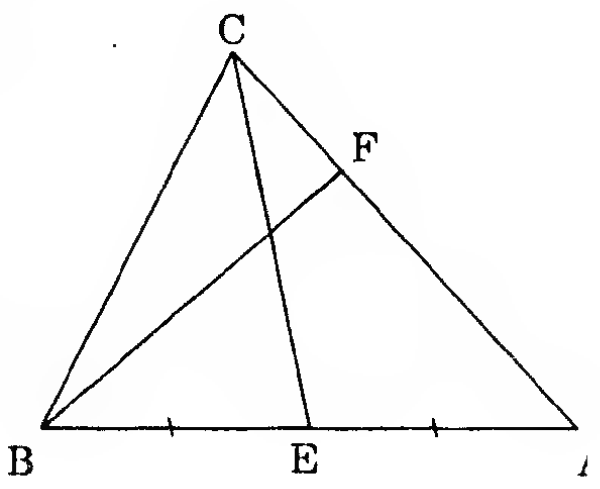
* Cho 3 điểm cố định A, B, C, tập hợp những điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = 0$ là đường thẳng đi qua A và vuông góc với BC.

BL2: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}.$$

HD: Hãy chứng minh $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \perp \overrightarrow{AB}$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng đi qua C vuông góc với AB



BL3: Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn:

$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC}) = 0.$$

HD: Gọi E là trung điểm của AB, F là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{FA} + 2\overrightarrow{FC} = \vec{0}$ (Xem hình)

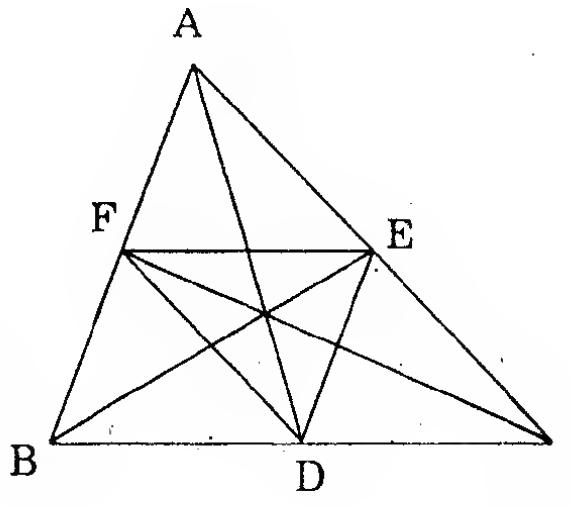
Đẳng thức đã cho tương đương với

$$6\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = 0.$$

BT9: Cho tam giác ABC có 3 trung tuyến AD, BE và CF. Chứng minh rằ

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF} = 0.$$

HD: Tính theo các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của tam giác ABC, ta chứng minh VT bằng VP.



Giải:

Ta có:

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC});\ \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$$

$$\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$$

$$= \frac{1}{2}[\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}]$$

$$= \frac{1}{2}[(\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA})]$$

Ta có: $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} = 0$

Tương tự: $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC}$

$$= \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF} = 0.$$

BÀI TẬP BỔ SUNG

BT10: Cho các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ khác vectơ không. Khi nào có các đẳng thức sau

a. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$; b. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$.

Giải:

a. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}| \Leftrightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$

$\Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b})^2 = (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2$

$\Leftrightarrow \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|$

$\Leftrightarrow 2\vec{a}.\vec{b} = 2|\vec{a}||\vec{b}| \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$

$\Leftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a};\vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|$

$\Leftrightarrow \cos(\vec{a};\vec{b}) = 1 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng.

b. $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2 \Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2$

$\Leftrightarrow \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}.\vec{b}$

$\Leftrightarrow \vec{a}\,\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

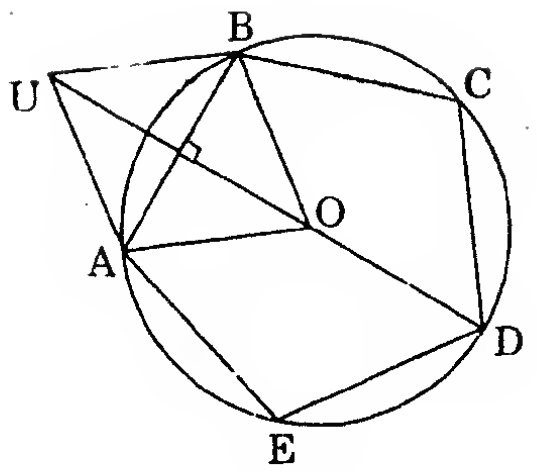
BT11: Cho ngũ giác đều ABCDE có tâm O.

a. Chứng minh tồn tại số thực $k < 0$ sao cho $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = k.\overrightarrow{OD}$.

b. Chứng minh $\vec{v} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}$ cùng phương với $\overrightarrow{OD}$.

c. Chứng minh $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$.

Giải:



a. Do ABCDE là đều có tâm O

nên $AB \perp OD$ (1)

(Bạn đọc hãy chứng minh chi tiết kết quả này).

Vẽ hình bình hành AOBU ta có:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OU}$$

Vì OA = OB nên AOBU còn là hình thoi

$\Rightarrow \overrightarrow{OU} \perp \overrightarrow{AB}$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{OU}$ và $\overrightarrow{OD}$ cùng phương và ngược hướng

Vì vậy tồn tại số thực $k < 0$ sao cho: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = k.\overrightarrow{OD}$.

b. Chứng minh tương tự ta cũng có:

$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = m.\overrightarrow{OD}$ với m là số thực nào đó

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = k.\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OD} + m.\overrightarrow{OD}.$$

$$= (k + m + 1)\overrightarrow{OD}$$

$\Rightarrow \vec{v}$ cùng phương với $\overrightarrow{OD}$

c. Chứng minh tương tự ta cũng có:

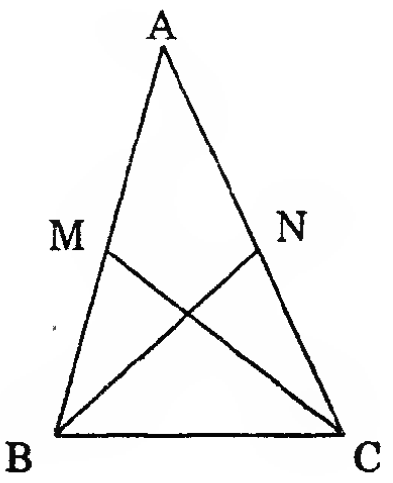
$\vec{v}$ cùng phương với $\overrightarrow{OC}$

Vì $\overrightarrow{OD}$ và $\overrightarrow{OC}$ là 2 vectơ không cùng phương nên $\vec{v} = \vec{0}$

Hay : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$.

BT12: Cho tam giác ABC cân đỉnh A có 2 đường trung tuyến của 2 cạnh bên vuông góc nhau Tính góc A.

Giải:



Gọi 2 trung tuyến là BN, CM,

$$0 = \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{CM} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN})(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM})$$

$$= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AM} \quad (*)$$

Ta có: $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{MA}$. Thế vào (*):

$$(2\overrightarrow{NA})(2\overrightarrow{MA}) + (2\overrightarrow{MA})\overrightarrow{AM} +$$

$$+ \overrightarrow{AN}(2\overrightarrow{NA}) + \overrightarrow{AN}\,\overrightarrow{AM} = 0$$

$$\Rightarrow 5\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{MA}^2 - 2\overrightarrow{NA}^2 = 0 \quad (**)$$

Tam giác ABC cân nên MA = NA

$$(**) \Leftrightarrow 5\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{NA} = 4MA^2 \Leftrightarrow 5MA^2.\cos(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AN}) = 4MA^2$$

$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{AM};\ \overrightarrow{AN}) = \frac{4}{5}$.

Có thể giải cách khác bằng cách sử dụng kết quả bài toán 6 như sau:

$$0 = 4\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{CM} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA})$$
$$= \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA}$$
$$= (\overrightarrow{BA}\ \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC}\ \overrightarrow{CA}) - \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{BA}\ \overrightarrow{CA}$$
$$= \overrightarrow{CB}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA}) - \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA}$$
$$= \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA} = -2\overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{BA}\ \overrightarrow{CA}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{BC}^2 \Leftrightarrow AB^2.\cos A = 2\overrightarrow{BC}^2$$

Mặt khác $\overrightarrow{BC}^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{BA}\ \overrightarrow{CA} = 2AB^2 - 2AB2.\cos A$

$$\Rightarrow AB^2\cos A = 2\overrightarrow{BC}^2 = 4AB^2 - 4AB^2\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{4}{5}$$

BT13: Cho O là trung điểm của AB chứng minh:

$$\overrightarrow{MA}\ \overrightarrow{MB} = OM^2 - OA^2 \qquad \text{(SBT)}.$$

HD: $\overrightarrow{MA}\ \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA})$.

BT14: Cho tứ giác ABCD. Chứng minh biểu thức:

$$AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = 2\overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{DB} \qquad \text{(SBT)}.$$

Cách 1 : Ta chứng minh VT bằng VP, bằng cách sử dụng tính chất: Bình phương độ dài bằng bình phương vô hướng, sau đó sử dụng các đẳng thức:

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}.\vec{b} \qquad (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 - 2\vec{a}.\vec{b}$$
$$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}^2.$$

Giải:

$$AB^2 - BC^2 + CD^2 - DA^2 = (\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2) + (\overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{DA}^2)$$
$$= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA})(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA})$$
$$= \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CA}(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA})$$
$$= \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}) - \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA})$$
$$= \overrightarrow{AC}[(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) - (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})]$$
$$= \overrightarrow{AC}[\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{BD}] = \overrightarrow{AC}[\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB}]$$
$$= \overrightarrow{AC}(2\overrightarrow{DB}) = 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}.$$

Cách 2: Lấy điểm O bất kì

$VT = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^2 - (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC})^2 - (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD})^2$

$= \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OA}^2 - 2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}^2 - \overrightarrow{OB}^2 + 2\overrightarrow{OC}\,\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}^2$

$+ \overrightarrow{OC}^2 - 2\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}^2 - \overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD}$

$= -2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD}$

$VP = 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD})$

$= 2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OD}$

VT = VP điều phải chứng minh.

BT15: Cho tam giác ABC có trọng tâm G

a. Với điểm M là một điểm bất kì, tính $s = MA^2 + MB^2 + MC^2$ theo độ dài đoạn thẳng GA, GB, GC và MG.

b. Tìm vị trí của M sao cho s nhỏ nhất.

c. Tìm vị trí của M trên đường thẳng d cố định sao cho s nhỏ nhất.

Giải:

a. $s = MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$

$= (\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GB})$

$+ (\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GC})$

$= 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$

Vì G là trọng tâm nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 0$

$\Rightarrow s = 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2$.

b. Ta có:

$s = 3\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 \geq \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2$ (*)

Vì $\overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2$ không đổi (không phụ thuộc vào vị trí của điểm M) và (*) xảy ra dấu bằng khi và chỉ khi $M \equiv G$

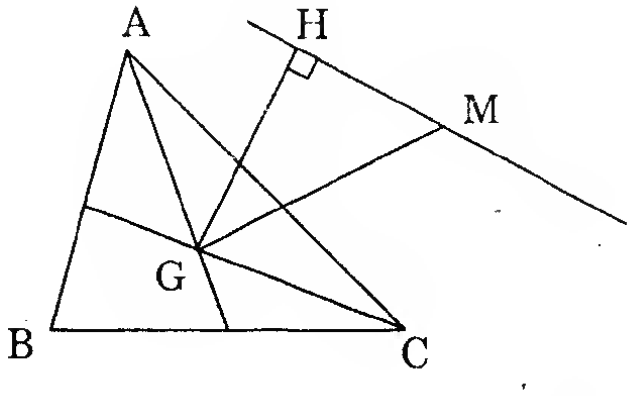
Vậy s nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv G$.

c. Vì $\overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2$ không đổi

s nhỏ nhất $\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG}^2$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ MG nhỏ nhất

$\Leftrightarrow$ M là hình chiếu vuông góc của G lên đường thẳng d.



Chú ý: Cho đường thẳng d và điểm M, điểm N thuộc d thỏa mãn MN nhỏ nhất là hình chiếu vuông góc của M lên d.

BL: Cho tứ giác ABCD

a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD, O là trung điểm của MN. Chứng minh rằng: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

b. Với điểm M là một điểm bất kì, tính $s = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ theo độ dài đoạn thẳng OA, OB, OC, OD và MO.

c. Tìm vị trí của M sao cho s nhỏ nhất.

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I TRONG SÁCH GIÁO KHOA

BT1: Tìm điều kiện của $\vec{a}$, $\vec{b}$ sao cho

a. $(\vec{a} + \vec{b})^2 = 0$ b. $(\vec{a} - \vec{b})^2 = 0$.

HD:

a. $(\vec{a} + \vec{b})^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b}$. Vậy $\vec{a}$, $\vec{b}$ đối nhau.

b. Tương tự $\vec{a}$, $\vec{b}$ bằng nhau.

BT2: Cho $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ Các khẳng định sau đúng hay sai:

a. $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi hình chiếu $\vec{b}$ lên giá của $\vec{a}$ bằng $\vec{b}$.

b. $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$.

c. $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi $\text{cotg}(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

ĐS : a. đúng.

b. Sai, vì nếu $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương nhưng ngược hướng thì $(\vec{a}, \vec{b}) = 180^0$ và vì vậy $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1$

c. Sai vì $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương $\Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 180^0$ hoặc $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^0$, nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^0$ khi ấy $\text{cotg}(\vec{a}, \vec{b})$ không xác định.

BT3: Xác định góc của hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ trong các trường hợp

a. $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|$; b. $\vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}|$;

c. $\vec{a}.\vec{b} = \frac{\sqrt{2}}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$.

d. Hai vectơ $\vec{a} + 2\vec{b}$ và $5\vec{a} - 4\vec{b}$ vuông góc nhau và $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$.

HD: Sử dụng công thức $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})$

a. 0^0 b. 180^0 c. 45^0

d. $0 = (\vec{a} + 2\vec{b})(5\vec{a} - 4\vec{b}) = 5\vec{a}^{\,2} - 4\vec{a}.\vec{b} + 10\vec{a}.\vec{b} - 8\vec{b}^{\,2}$

$= 5|\vec{a}|^2 + 6\vec{a}.\vec{b} - 8|\vec{b}|^2 = -3 + 6|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\vec{a}, \vec{b})$

$= -3 + 6\cos(\vec{a}, \vec{b}) \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 60^0.$

BT4: Dùng công cụ vectơ chứng minh định lí Pitagor

Giải:

Cho tam giác ABC vuông tại A, ta chứng minh $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$BC^2 = \overrightarrow{BC}^{\,2} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^{\,2} + \overrightarrow{AC}^{\,2} + 2\overrightarrow{BA}\,\overrightarrow{AC}$

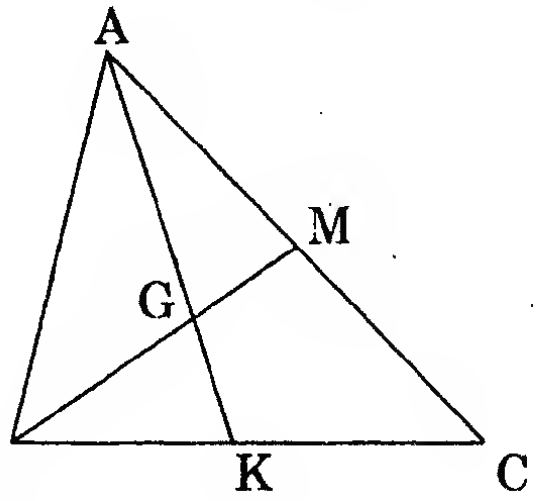
$= \overrightarrow{BA}^{\,2} + \overrightarrow{AC}^{\,2}$ (Vì $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{AC}$)

$= AB^2 + AC^2$

BL: Cho tam giác ABC. Chứng minh : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

BT5: Cho AK và BM là hai trung tuyến của tam giác ABC. Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo các vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AK}$ và $\vec{v} = \overrightarrow{BM}$ (SBT).

Giải:



Ta có:

$2\vec{u} = 2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}$ (1)

$2\vec{v} = 2\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$ (2)

(1) trừ (2) vế theo vế ta có:

$2\vec{u} - 2\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC}$

$= 2\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})$

$= 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\vec{u} - \vec{v})$

Thế vào (1) ta có: $2\vec{u} = \frac{2}{3}(\vec{u} - \vec{v}) - \overrightarrow{CA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CA} = -2\vec{u} + \frac{2}{3}(\vec{u} - \vec{v}) = -\frac{4}{3}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v}$

Thế $\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}(\vec{u} - \vec{v})$ vào (2) ta có: $2\vec{v} = \overrightarrow{BC} - \frac{2}{3}(\vec{u} - \vec{v})$

$\Rightarrow \overrightarrow{BC} = 2\vec{v} + \frac{2}{3}(\vec{u} - \vec{v}) = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{4}{3}\vec{v}$

Ngoài cách trên ta có thể chứng minh bằng cách sử dụng tính chất của trọng tâm như sau:

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Theo qui tắc 3 điểm

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GK}$, $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}$ (*)

Theo tính chất của trọng tâm ta có:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\vec{u},\ \overrightarrow{GB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BM} = -\frac{2}{3}\vec{v},\ \overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\vec{v}$$

$$\overrightarrow{GK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\vec{u},\ \overrightarrow{MG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BM} = -\frac{1}{3}\vec{v},\ \overrightarrow{GA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AK} = -\frac{2}{3}$$

Lại có $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BK}$, $\overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{MA}$

Thế vào (*) ta có kết quả.

BL: Cho tam giác ABC. K, M là 2 điểm thỏa mãn $\overrightarrow{KB} = -2\overrightarrow{KC}$, $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MA}$. Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ theo các vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{AK}$ và $\vec{v} = \overrightarrow{BM}$.

HD: Sử dụng cách 1 của bài toán trên.

BT6: Cho 4 điểm tùy ý A, B, C, D. Chứng minh rằng

$$\overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD}\,\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD} = 0$$

Từ đó suy ra: Trong một tam giác 3 đường cao đồng quy (SBT).

HD: a. Sử dụng qui tắc 3 điểm của phép trừ chuyển về các vectơ có cùng điểm đầu, chẳng hạn điểm A

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$$

$$= (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})\overrightarrow{AD} - (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}).$$

b. Cho tam giác ABC có 2 đường cao AK và BM cắt nhau tại H. Ta chứng minh $CH \perp AB$

Áp dụng đẳng thức ở câu a cho 4 điểm A, B, C, H

Ta có:

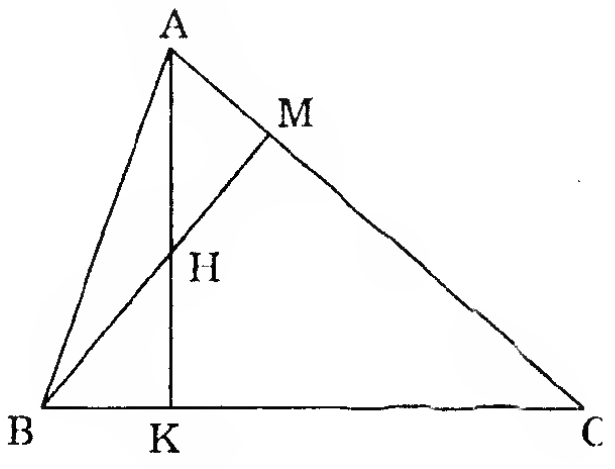
$$\overrightarrow{BC}\,\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BH}\,\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CH} = 0 \quad (*)$$

Mặt khác vì

$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{CA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA} = 0$

$(*) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{CH} \perp \overrightarrow{AB}$



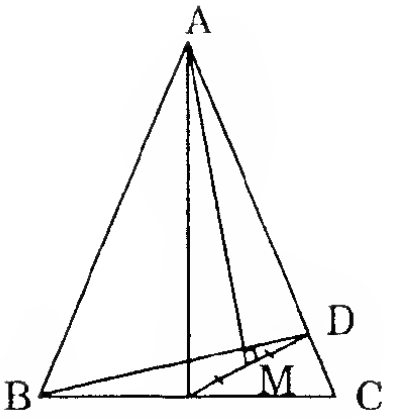
Vậy CH là đường cao của tam giác ABC

Hay trong một tam giác 3 đường cao đồng quy.

BL: Cho tam giác cân ABC đỉnh A và đường cao AH. Gọi D là hình chiếu vuông góc của H lên AC, M là trung điểm của HD.

Chứng minh rằng $AM \perp BD$.

Giải:



Gọi M là trung điểm của HD ta có:

$2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD}$

Mặt khác: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$

$= \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}$

(vì $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$) $= \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}$ ($\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{HC}$)

$= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}$ (công thức hình chiếu)

$= 2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD} - 2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD} = 0$

$\Rightarrow AM \perp BD.$

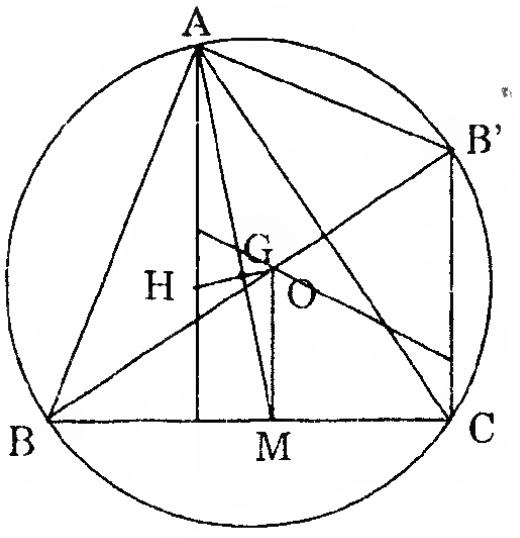
BT7: Cho O, H, G theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm và trọng tâm của tam giác ABC. B' là điểm đối xứng của B qua O.

Chứng minh rằng:

a. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AH}$

b. Ba điểm O, G, H thẳng hàng (đường thẳng đi qua 3 điểmO. G. H gọi là đường thẳng Ơ-le của tam giác ABC).

Giải:



a. Xem BT9 chương I.

b. Gọi M là trung điểm của BC

Gọi G' là giao điểm của HO và AM, ta chứng minh G' ≡ G

Vì CM là đường trung bình của tam giác BCF nên $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'C} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$

Hai tam giác G'OM và G'H A đồng dạng nên

$\frac{AG'}{G'M} = \frac{AH}{OM} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{AG'} = 2\overrightarrow{G'M}$

Vậy G' là trọng tâm của tam giác ABC $\Rightarrow$ G' ≡ G

Vậy ba điểm O, G, H thẳng hàng.

Bạn đọc có học lực khá giỏi có thể tham khảo thêm cách chứng minh trực tiếp O, G, H thẳng hàng chỉ bằng kiến thức vectơ qua bài luyện.

BL: Chứng minh 3 đường đường cao của tam giác đồng qui tại 1 điểm, điểm này được gọi là trực tâm của tam giác ABC.

Giải:

Gọi O, G, A' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm, trực tâm, trung điểm của cạnh BC của tam giác ABC. Gọi H là điểm bất kì

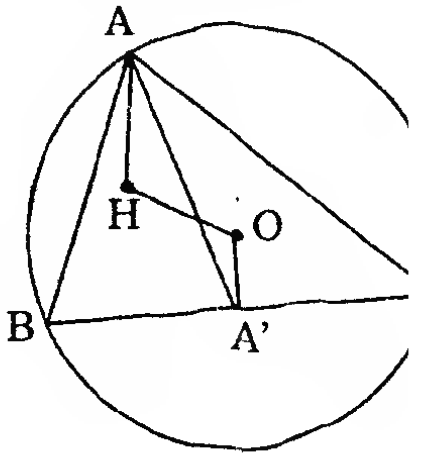
$$2\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) - \overrightarrow{OA}$$

$$= 3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OA}$$

(Do G là trọng tâm của ΔABC)

$$= 3\overrightarrow{OG} - (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA}) \text{ (Qui tắc 3 điểm)}$$

$$= (3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH}) - \overrightarrow{HA}$$



Vì H là điểm bất kì nên ta chọn H sao cho

$$3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH} = \vec{0} \quad (*)$$

(Rõ ràng là điểm H thỏa (*) tồn tại và duy nhất)

Với (*), ta suy ra: $2\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{HA} \Rightarrow \overrightarrow{OA'}$ cùng phương với $\overrightarrow{HA}$

Mà $OA' \perp BC \Rightarrow HA \perp BC$ (tính chất của đường tròn)

$\Rightarrow HA \perp BC$

Chứng minh tương tự ta có $HB \perp AC$, $HC \perp AC$

Vậy 3 đường cao của tam giác đồng qui tại H, H chính là trực tâm của tam giác ABC.

Nhận xét: Bằng phương pháp vectơ không những ta chứng minh 3 đường cao đồng qui mà ta còn chứng minh được O. G. H thẳng hàng và $3\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OH} = \vec{0}$.

BT8: (Sử dụng máy tính). Một đèn tín hiệu giao thông có trọng lượng 60N được treo nhờ dây cáp có trọng lượng không đáng kể. Hai đầu dây cáp được giữ bởi 2 cột có chiều cao bằng nhau và cách nhau 8m. Đèn treo ở trung điểm O của dây cáp và làm võng xuống 0,5 m. Tính cường độ của lực căng sợi dây cáp.

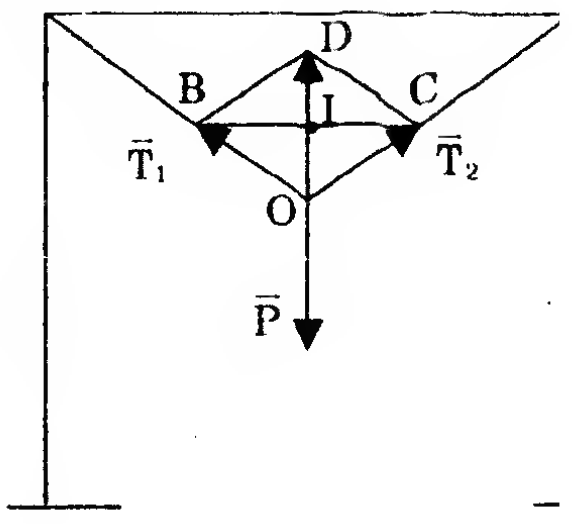
Giải:

Vì vật đứng yên nên theo định luật 3 Niutơn ta có

$$\vec{P} + \overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} = \vec{0}$$

$\overrightarrow{OA} = \vec{P}$ trọng lượng của đèn tín hiệu

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{T_1}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{T_2}$ là lực căng của dây, ta có OA = OB



Vẽ hình bình hành OBDC, ta có

$$\overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{T_2} = -\vec{P} = \overrightarrow{OD} \quad \Rightarrow OD = 60$$

Ta có: $OB = \dfrac{OI}{\cos\alpha} = \dfrac{OD}{2\cos\alpha} = \dfrac{30}{\cos\alpha}$

Mặt khác: $OH = \sqrt{HT^2 + OT^2} = \sqrt{16 + \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{OT}{OH} = \dfrac{1}{\sqrt{65}} \quad \Rightarrow OB = \dfrac{30}{\cos\alpha} = 30\sqrt{65} \approx 241{,}186$

Vậy cường độ của lực căng sợi dây cáp gần bằng 241,186N

BÀI TẬP BỔ SUNG

BT9: Cho tứ giác ABCD.Tìm điểm M sao cho:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}.$$

HD: *Cách1:* Gọi E ,F lần lượt là trung điểm AB và CD, hãy chứng minh M chính là trung điểm của EF.

Cách 2: Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC, với mọi điểm M ta có:

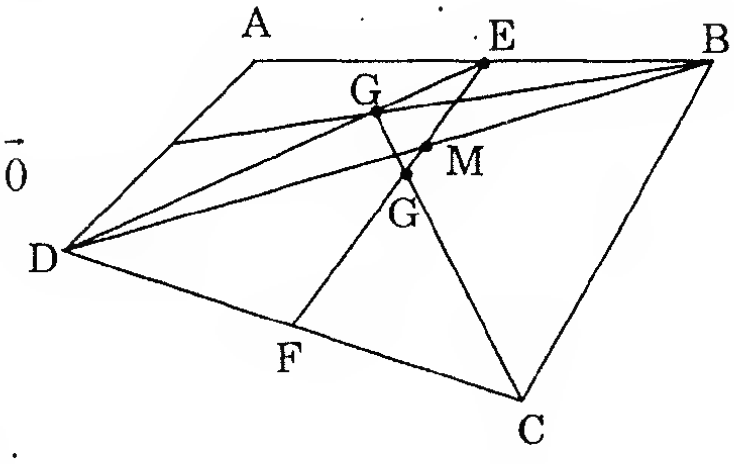
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

Vì vậy: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{GD}.$



BL1: Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, G theo thứ tự là trung điểm của AB, trung điểm của CD, trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng GD cắt EF tại trung điểm của EF.

HD: Sử dụng kết quả BT1.

BT10: Cho tam giác ABC có các điểm M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và CA

a. Chứng minh rằng: Nếu có 2 điểm B', C' sao cho:

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}$ thì N là trung điểm của B'C'.

b. Cho T là điểm tùy ý. Gọi A_1, B_1 và C_1 là các điểm đối xứng của T qua N, P, và M. Chứng minh:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1B_1} = \vec{0},\ \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{B_1C_1} = \vec{0},\ \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{C_1A_1} = \vec{0} \quad \text{(SBT)}.$$

Giải:

a. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{B'N} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NC'}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{B'N} = \overrightarrow{NC'}$ (do $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CN}$)

Vậy N là trung điểm của B'C'.

b. Vì NP là đường trung bình của tam giác TA_1B_1 nên $\overrightarrow{A_1B_1} = 2\overrightarrow{NP}$ (

Lại do NP là đường trung bình của tam giác ABC nên $2\overrightarrow{NP} = -\overrightarrow{AB}$

(1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{A_1B_1} = -\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1B_1} = \vec{0}$.

Hai đẳng thức còn lại chứng minh tương tự.

BT11: Cho 2 điểm cố định A, B

a. Với điểm bất kì M, gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

Chứng minh: $MA^2 + 2MB^2 = 3MI^2 + 6IB^2$

b. Tìm tập những điểm M thỏa mãn: $MA^2 + 2MB^2 = k$ (k là số thực cho trước).

Giải:

a. $MA^2 + 2MB^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2$

$= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + 2\overrightarrow{MI}^2 + 4\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IB}^2$

$= 3MI^2 + IA^2 + 2IB^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB}) = 3MI^2 + IA^2 + 2IB^2$

Mặt khác $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IB} \Rightarrow IA^2 = 4IB^2$

$\Rightarrow MA^2 + 2MB^2 = 3MI^2 + 6IB^2$.

b. Theo câu a ta có: $MA^2 + 2MB^2 = k$

$\Leftrightarrow 3MI^2 + 6IB^2 = k \Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{3}(k - 6IB^2)$

* Nếu $k > 6IB^2$ thì $IM = \sqrt{\frac{k - 6IB^2}{3}}$

Vậy tập hợp những điểm M là đường tròn tâm I bán kính $\sqrt{\frac{k - 6IB^2}{3}}$

* Nếu $k = 6IB^2$ thì IM = 0. Tập hợp điểm M là điểm I.

* Nếu $k < 6IB^2$. Không có điểm M nào thỏa đề bài.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM TRONG SÁCH GIÁO KHOA

BT1: Điều kiện nào sau đây là điều kiện cần và đủ để 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đối nhau

a. Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ chung gốc và có hướng ngược nhau.

b. $\vec{a}, \vec{b}$ có độ dài bằng nhau, chung gốc và ngược hướng.

c. $\vec{a}, \vec{b}$ có độ dài bằng nhau và ngược hướng.

đ. $\vec{a}, \vec{b}$ có cùng độ đài, cùng phương và cùng điểm cuối.

ĐS: *c*

BT2: Điều kiện nào sau đây là điều kiện cần và đủ để $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

a. ABCD là hình bình hành. b. ABDC là hình bình hành.

c. AD và BC có cùng trung điểm. đ. AB = CD và AB // CD.

HD: Rõ ràng câu a, b, không đúng vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ có thể đường thẳng AB và CD có thể trùng nhau. Câu d cũng không đúng vì AB = CD và AB // CD có thể $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ ngược hướng.

Ta chứng minh AD và BC có cùng trung điểm

Gọi I là trung điểm của AD ta có $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$

$AB = CD \Leftrightarrow IB - IA = ID - IC$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Vậy I là trung điểm của BC.

BT3: Điều kiện nào sau đây là điều kiện cần và đủ để I là trung điểm của đoạn AB

a. IA = IB. b. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$.

c. $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. đ. $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB}$.

DS: Câu b.

BT4: Gọi O là tâm của hình vuông ABCD. Vectơ nào trong các vectơ dưới đây bằng $\overrightarrow{CA}$

a. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$. b. $-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$. c. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA}$. đ. $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{CB}$.

ĐS: Câu c.

BT5: Cho 3 điểm A, B, C. Khẳng định nào trong các khẳng định sau là đúng

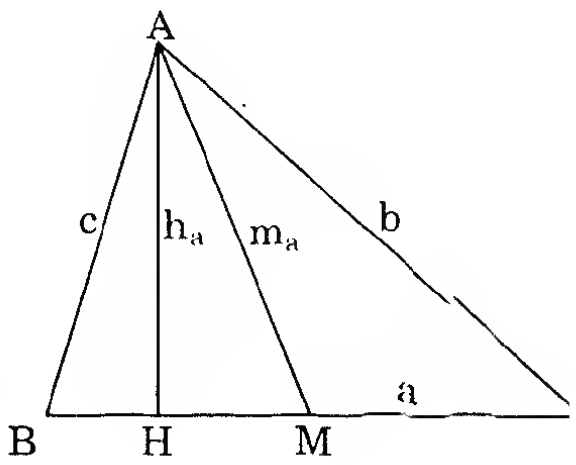
a. AB + BC = AC. b. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

c. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$.

ĐS: Câu b.

CHƯƠNG II
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ TRONG ĐƯỜNG TRÒN
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

TÓM TẮT LÍ THUYẾT



1. Định lí cosin:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$

Hệ quả:

$A < 90^0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 > a^2$

$A = 90^0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2$ (Định lí Pitagor)

$A > 90^0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 < a^2$

2. Định lí sin:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

3. Độ dài đường trung tuyến của tam giác

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}.$$

$$m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4}.$$

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

4. Các công thức tính diện tích tam giác:

$$S = \frac{1}{2}ab.\sin C = \frac{1}{2}ac.\sin B = \frac{1}{2}bc.\sin A.$$

$S = \frac{abc}{4R}$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác).

$S = pr$ với $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam gi

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (công thức Hê-rông).

BÀI TẬP TRONG SÁCH GIÁO KHOA

BT1: Cho tam giác ABC vuông tại A, $B = 58^0$, cạnh a = 72cm. Tínlh C, b, và h_a.

Giải:

Tính C

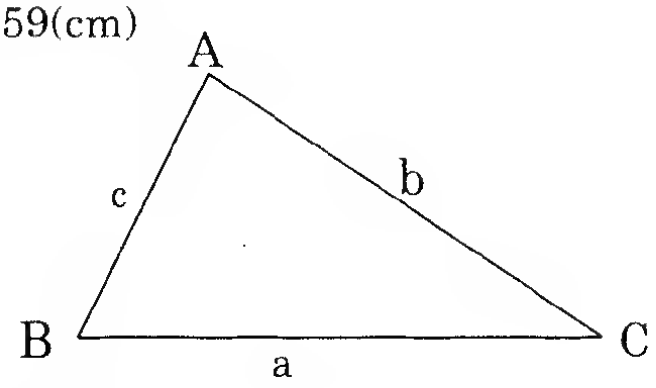
Ta có $B + C = 90^0 \Rightarrow C = 90^0 - B = 90^0 - 58^0 = 32^0$

$\sin B = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a.\sin B = 72\sin 58^0 \approx 61,059(cm)$

$c = a.\cos 58^0 = 72\cos 58^0 \approx 38,154$

$S = \frac{1}{2} h_a\, a = \frac{1}{2} bc$

$\Rightarrow h_a = \frac{bc}{a} = \frac{61,059.38,154}{72} \approx 32,356$



BT2: Tính góc lớn nhất của tam giác ABC biết:

a. a = 3cm, b = 4cm, c = 6cm

b. a = 40cm, b = 13cm, c = 37cm

Giải:

a. Chú ý rằng góc lớn nhất là góc đối diện với cạnh có độ dài lớn nhất của tam giác, vì vậy ta tính góc C

Theo định lí côsin ta có: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$

$\Rightarrow \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{3^2 + 4^2 - 6^2}{2.3.4} = -\frac{11}{24} \Rightarrow C \approx 117^0 16' 47''.$

b. Góc lớn nhất là góc A, ta có:

$\cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb} = \frac{13^2 + 37^2 - 40^2}{2.13.37} = -\frac{31}{481} \Rightarrow A \approx 93^0 41' 43''$

BT3: Cho tam giác XYZ có các cạnh x = 8, y = 10, z = 13. Hỏi tam giác đó góc tù không, nếu có hãy tính góc đó.

Giải:

Góc tù nếu có phải là góc lớn nhất, vì vậy chỉ có thể là góc Z

Ta có: $x^2 + y^2 = 8^2 + 10^2 = 164 < 13^2 = 169 = y^2$

Vậy $Z > 90^0$

Theo định lí côsin ta có: $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy.\cos Z$

$\Rightarrow \cos Z = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy} = \frac{8^2 + 10^2 - 13^2}{2.8.10} = -\frac{1}{32} \Rightarrow Z = 91^0 47' 27''.$

BL1: Cho tam giác ABC có AB = 2, AC = 3, BC = 4. Tính:

a. Diện tích S của tam giác. b. Các đường cao h_a, h_b, h_c.

c. Các bán kính R, r.

HD:

a. Tính S bằng công thức Hêrông ($S = \frac{3\sqrt{15}}{4}$).

b. Sử dụng công thức $S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c$.

ĐS: $h_a = \frac{3\sqrt{15}}{8}$, $h_b = \frac{\sqrt{15}}{2}$, $h_c = \frac{3\sqrt{15}}{4}$.

c. Sử dụng công thức $S = \frac{abc}{4R}$ $(R = \frac{8\sqrt{15}}{15})$.

BL2: Cho tam giác ABC có AC = 2, AB = 3, BC = 4. Gọi AH là đường cao. Tính CH.

ĐS: $\frac{11}{4}$

BL3: Cho tứ giác ABCD nội tiếp một đường tròn, biết AB = 5, BC = 6, CD = AD = 8. Tính các góc A, B, C, D của tứ giác

HD: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos B$ (1)

$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2AD.DC.\cos D$ (2)

$\Rightarrow AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos B = AD^2 + DC^2 - 2AD.DC.\cos D$

Từ phương trình trên với chú ý rằng cosB = −cosD (do B và D bù nhau), ta sẽ tính được cosB, cosD.

BT4: Cho tam giác ABC biết $A = 36^0$, b = 85m và c = 54m. Tính a, B, C.

Giải:

Theo định lí côsin ta có:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = 85^2 + 54^2 - 2.85.54.\cos 36^0 \approx 2714{,}223992$

$\Rightarrow a \approx 52{,}09821486$

Tương tự: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$

$$\Rightarrow \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{52{,}09821486^2 + 54^2 - 85^2}{2.52{,}09821486.54} \approx -0{,}28343475$$

$\Rightarrow B = 106^0 27'55''$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{52{,}09821486^2 + 85^2 - 54^2}{2.52{,}09821486.85} \approx 0{,}792984604$$

$\Rightarrow C \approx 180^0 - 106^0 27'55'' \approx 37^0 32'5''$.

BL: Cho tam giác ABC có AB = 3, AC = 4 và điện tích $S = 3\sqrt{3}$. Tính BC

HD: Sử dụng công thức $S = \frac{1}{2} AB.AC.\sin A$ ta tính được góc A

Chú ý rằng $\sin A = \sin\alpha$ $(0^0 < \alpha < 90^0) \Leftrightarrow \begin{cases} A = \alpha \\ A = \pi - \alpha \end{cases}$

Sử dụng định lí cosin ta tính được BC.

ĐS: $BC = \sqrt{13}$ hoặc $BC = \sqrt{37}$.

BL: Cho tam giác ABD, với BD = 10, AB = 7, góc $\widehat{DBA} = \alpha = 25^0$. Trên tia đối của tia BA lấy QC sao cho BC = 8. Tính khoảng cách từ C đến AD

HD: Tính DA bằng định lí côsin

Tính sinA bằng định lí sin, từ đó suy ra khoảng cách CE từ C đến AD

CE ≈ 13,48

BT5: Cho tam giác ABC biết a = 137,5; B = 83^0; C = 57^0. Tính A, b, c

Giải:

$A = 180^0 - (B + C) = 180^0 - (83^0 + 57^0) = 40^0$

Theo định lí sin ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$\Rightarrow b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{137,5.\sin 83^0}{\sin 40^0} \approx 212,3176$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A} = \frac{137,5.\sin 57^0}{\sin 40^0} \approx 179,4017.$$

BT6: Cho tam giác ABC cân tại A có A = 30^0 và có cạnh đáy BC = 6cm. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác cân đó.

Giải:

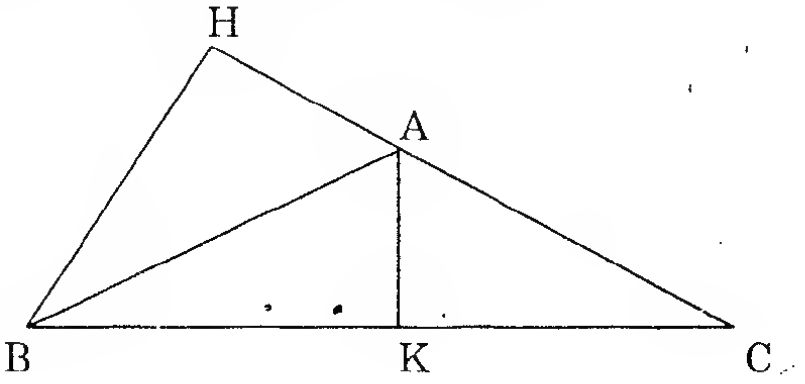
Theo định lí côsin ta có: $\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{6}{2\sin 30^0} = 6cm$

Chú ý rằng đề toán này thừa giả thiết cân.

BL: Cho tam giác ABC cân tại A. Đường cao BH = 4, góc B = 30^0

a. Tính các cạnh của tam giác và các đường cao còn lại.

b. Tính R, r.



$$AB = \frac{BH}{\cos 30^0}$$

$$BC = \frac{AB.\sin 120^0}{\sin 30^0}$$

$$AK = \frac{AC.BH}{BC}$$

Tính R, r bằng công thức tính diện tích.

BT7: Tam giác ABC có các cạnh đối diện với các góc A, B, C lần lượt là a, b, c. Gọi m_a, m_b, m_c lần lượt là trung tuyến ứng với đỉnh A, B, C.

Chứng minh rằng: $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

Giải:

Sử dụng công thức trung tuyến của tam giác ABC ta có:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \quad (1) \qquad m_b^2 = \frac{c^2 + a^2}{2} - \frac{b^2}{4} \quad (2)$$

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \quad (3)$$

(1) cộng (2) cộng (3) vế theo vế ta có:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{c^2+a^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

$$= \frac{2b^2+2c^2-a^2+2c^2+2a^2-b^2+2a^2+2b^2-c^2}{4} = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

BL1: Cho tam giác ABC có G là trọng tâm.

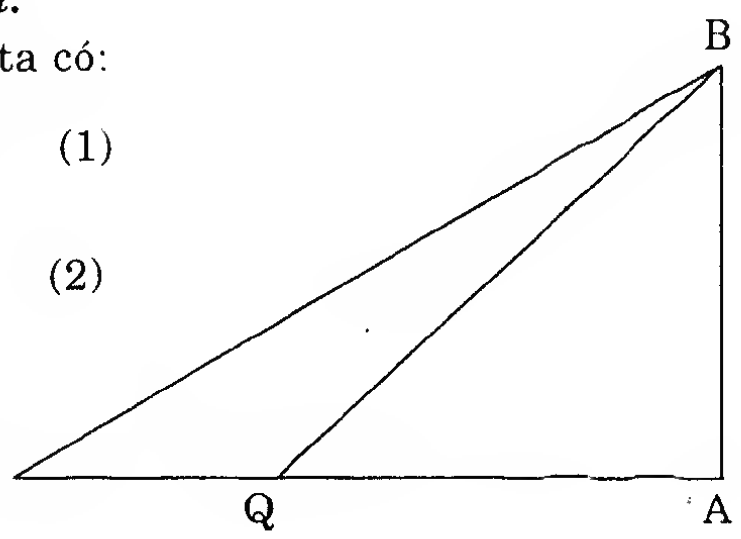
Tính $GA^2 + GB^2 + GC^2$ theo a, b, c.

ĐS: $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$.

BT8: Hai chiếc tàu thủy P, Q cách nhau 300m. Từ P, Q thẳng hàng với chân A của tháp hải đăng AB trên bờ biển người ta nhìn chiều cao AB của tháp dưới góc $BPA = 35^0$ và góc $BQA = 48^0$.

Tính chiều cao AB của tháp.

Giải:



Xét các tam giác vuông BQA, BPA ta có:

$$\cot g48^0 = \frac{AQ}{AB} \Rightarrow AQ = AB\cot g48^0 \quad (1)$$

$$\cot g35^0 = \frac{AP}{AB} \Rightarrow AP = AB\cot g35^0 \quad (2)$$

(2) trừ (1) vế theo vế ta có:

$AP - AQ = AB\cot g35^0 - AB\cot g48^0$

$\Leftrightarrow PQ = AB(\cot g35^0 - \cot g48^0)$

$\Leftrightarrow 300 = AB(\cot g35^0 - \cot g48^0)$

$$\Rightarrow AB = \frac{300}{\cot g35^0 - \cot g48^0} \approx 568{,}4574744\text{m}.$$

BT9: Tam giác ABC có b = 7cm, c = 5cm và $\cos A = \frac{3}{5}$.

Tính cạnh a, bán kính đường tròn ngoại tiếp và chiều cao h_a của tam giác.

Giải

Theo định lí cosin ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = 7^2 + 5^2 - 2.7.5.\frac{3}{5} = 32$

$\Rightarrow a = 4\sqrt{2}$ cm

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5}$$

Theo định lí sin ta có: $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{4\sqrt{2}}{2.\frac{4}{5}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

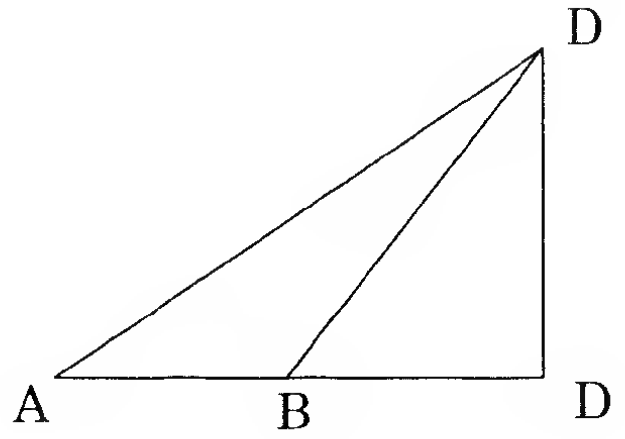
Theo công thức tính diện tích ta có: $S = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bc\sin A.$

$$\Rightarrow h_a = \frac{bc\sin A}{a} = \frac{5.7.4.}{5.4\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}.$$

BL: Cho tam giác ABC có 2 trung tuyến BM = 9, CN = 6 và trọng tâm G. Góc $\widehat{CGB} = 120^0$. Tính các cạnh của tam giác ABC.

ĐS: $AC = 2\sqrt{13}$, $AB = 4\sqrt{7}$, $BC = 2\sqrt{19}$

BT10: Một tháp nước có chiều cao CD = h. Từ 2 điểm A, B thẳng hàng với chân D của tháp nước với khoảng cách AB = 3m người ta đo được $\widehat{CAD} = 43^0$, $\widehat{CBD} = 67^0$. Tính chiều cao h của tháp nước.



HD: Giải tương tự bài 8, ta có:

$$CD = \frac{3}{\cot g43^0 - \cot g67^0} \approx 4{,}6304m.$$

BT11: Cho tam giác ABC có a = 7cm, b = 8cm, c = 6cm.

Hãy tính đường cao h_a và trung tuyến m_a.

HD: Tam giác đã có 3 cạnh, để tính đường cao ta sử dụng công thức diện tích, chú ý đến công thức Hê-rông.

Giải:

Theo công thức tính diện tích của tam giác:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2} ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$$

$a = 7cm$, $b = 8cm$, $c = 6cm$, $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{21}{2}$

$$\Rightarrow h_a = \frac{2\sqrt{\frac{21}{2}.\frac{7}{2}.\frac{5}{2}.\frac{9}{2}}}{7} \approx 5{,}88095cm.$$

Theo công thức tính trung tuyến của tam giác ta có:

$$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{8^2+6^2}{2} - \frac{7^2}{4} = \frac{151}{4} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{151}}{2} \approx 6{,}1441cm.$$

BL1: Cho tam giác ABC có a = 2cm, b = 3cm, c = 4cm

Hãy tính R, r, S, h_a, h_b, h_c.

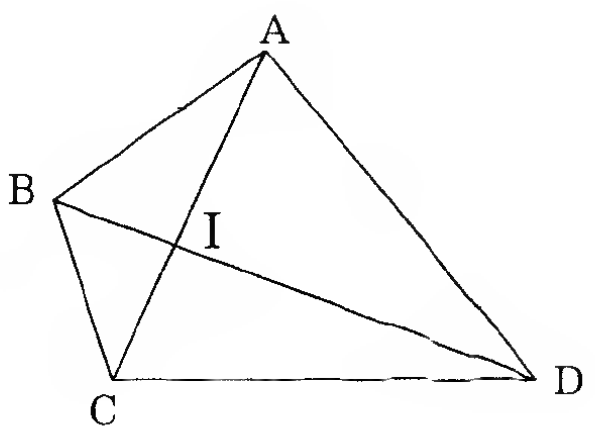
ĐS: $S = \frac{3\sqrt{15}}{4}$, $h_a = \frac{3\sqrt{15}}{8}$, $h_b = \frac{\sqrt{15}}{2}$, $h_c = \frac{3\sqrt{15}}{4}$, $R = \frac{8}{\sqrt{15}}$, $r = \frac{\sqrt{15}}{6}$.

BL2: Tính góc A của tam giác ABC biết $c(a^2 - c^2) = b(b^2 - a^2)$

HD: Thu gọn đẳng thức đã cho, sau đó kết hợp với định lí côsin.

ĐS: $A = 60^0$

BT12: Cho tứ giác lồi ABCD, gọi α là góc hợp bởi hai đường chéo AC và BD $(0 < \alpha \leq 90^0)$. Chứng minh rằng diện tích của tứ giác ABCD được tính bởi công thức: $S = \frac{1}{2} AC.BD.\sin\alpha$.



Giải:

Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC, BD

$S = S_{IAB} + S_{IBC} + S_{ICD} + S_{IDA}$ (1)

Theo công thức diện tích tam giác ta có:

$S_{IAB} = \frac{1}{2} IA.IB.\sin I_1 = \frac{1}{2} IA.IB.\sin\alpha$ (2)

$S_{IBC} = \frac{1}{2} IB.IC.\sin I_2 = \frac{1}{2} IB.IC.\sin(180^0 - \alpha) = \frac{1}{2} IB.IC.\sin\alpha$ (3)

$S_{ICD} = \frac{1}{2} IC.ID.\sin\alpha$ (4)

$S_{IDA} = \frac{1}{2} ID.IA.\sin I_3 = \frac{1}{2} ID.IA.\sin\alpha$ (5)

Thế (2), (3), (4) vào (1) ta có:

$$S = \frac{1}{2} IA.IB.\sin\alpha + \frac{1}{2} IB.IC.\sin\alpha + \frac{1}{2} IC.ID.\sin\alpha + \frac{1}{2} ID.IA.\sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2} IB.\sin\alpha\,(IA + IC) + \frac{1}{2} ID.\sin\alpha(IC + IA)$$

$$= \frac{1}{2} IB.\sin\alpha\, AC + \frac{1}{2} \sin\alpha.ID.AC = \frac{1}{2} \sin\alpha\, AC(IB + ID) = \frac{1}{2} AC.BD.\sin\alpha$$

Trong trường hợp AC và BD vuông góc ta có $\sin\alpha = 1 \Rightarrow S = \frac{1}{2} AC.BD$

BL1: Cho tứ giác lồi ABCD. Dựng hình bình hành ABDC'. Chứng minh rằng diện tích tứ giác ABCD và diện tích tam giác ACC' bằng nhau (SBT).

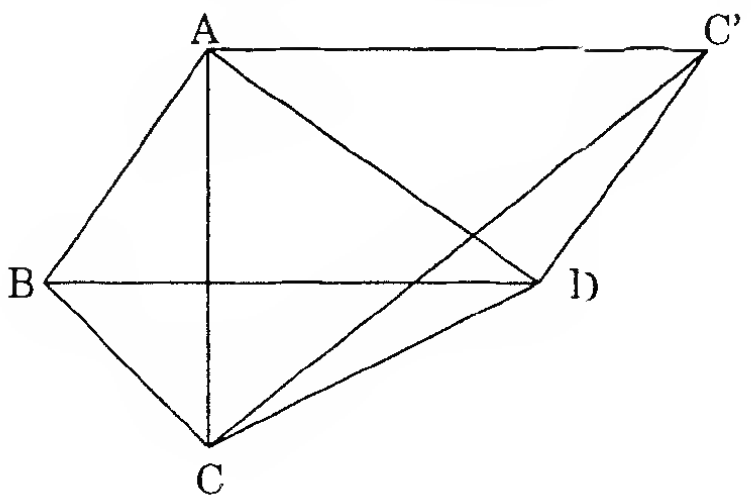
Giải:

Gọi α là góc giữa 2 đường chéo AC, BD của tứ giác ABCD tứ giác ABCD

Ta có: $\widehat{CAC'} = \alpha$ (do AC' // BD)

Theo BT4 ta có:

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC.BD.\sin\alpha$



Mặt khác: $S_{ACC'} = \frac{1}{2} AC.AC' \sin\alpha$

Mà $AC' = BD$, vì vậy $S_{ABCD} = S_{ACC'}$

BL2: Chứng minh rằng diện tích hình bình hành bằng tích 2 cạnh liên tiếp với sin góc xen giữa chúng.

HD: Diện tích tam giác ABD bằng diện tích tam giác DBC.

$S = S_{ABD} + S_{DBC}$.

BT13: Người ta muốn đo chiều cao của tháp chàm Por Garai ở Ninh Thuận, người ta lấy 2 điểm A, B cách nhau một khoảng AB 12m cùng thẳng hàng với chân C của tháp để đặt 2 giác kế. Chân của giác kế có chiều cao h = 1,3m. Gọi D là đỉnh tháp và 2 điểm A_1 và C_1 cùng thẳng hàng với điểm C_1 thuộc chiều cao CD của tháp. Người ta đo được $\widehat{DA_1C_1} = 49^0$ và $\widehat{DB_1C_1} = 35^0$. Tính chiều cao $CD = C_1D + C_1C$.

Giải:

Tương tự bài toán bài toán 10 ta có:

$$C_1D = \frac{AB}{\cot g35^0 - \cot g49^0} = \frac{12}{\cot g35^0 - \cot g49^0} \approx 21,47223$$

$\Rightarrow CD = C_1D + C_1C \approx 21,47223 + 1,3 = 22,77223$m.

BÀI TẬP BỔ SUNG

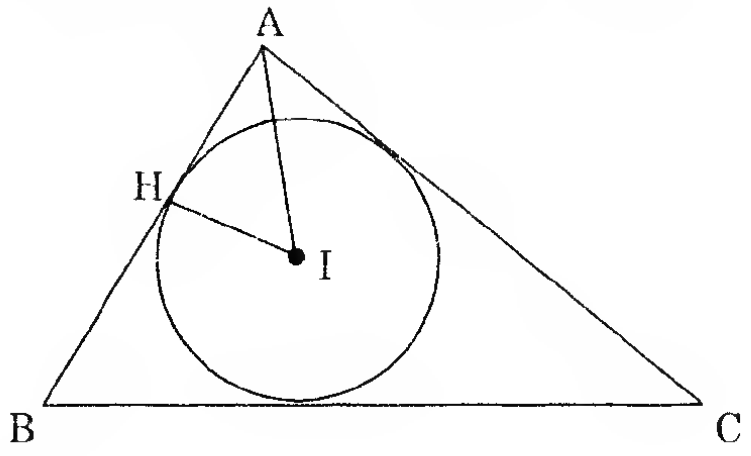
BT14: Cho tam giác ABC. Chứng minh

a. $r = (p - a)\, tg\frac{A}{2}$ b. $tg\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$

Giải:

a. Giả sử đường tròn tâm I nội tiếp ΔABC tiếp xúc với BA tại H. Ta có

$\widehat{AIH} = \frac{A}{2}$, $AH = p - a$



ΔIAH vuông tại H ta có:

$$tg\frac{A}{2} = \frac{IH}{AH} = \frac{r}{p-a}$$

$$\Rightarrow r = (p - a)\, tg\frac{A}{2}.$$

b. Theo công thức tính điện tích ta có:

$$S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow p(p - a)tg\frac{A}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$\Rightarrow \text{tg}\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p(p-a)} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

BL1: Cho tam giác ABC có: 2c = a + b. Chứng minh: $\text{tg}\frac{A}{2}\text{tg}\frac{B}{2} = \frac{1}{3}$.

HD: Sử dụng công thức trong câu b BT14, biến đổi tương đương đẳng thức cần chứng minh về đẳng thức cho ở giả thiết.

BL2: Cho tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh: $\text{tg}\frac{B}{2} = \frac{b}{a+c}$.

BT15: Tam giác ABC có b + c = 2a. Chứng minh rằng:

a. 2sinA = sinB + sinC. b. $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$ (SBT.

Giải:

a. Sử dụng định lí sin: $\frac{a}{2R} = \sin A; \frac{b}{2R} = \sin B; \frac{c}{2R} = \sin C$

Chia 2 vế của đẳng thức đã cho cho 2R ta có:

$$\frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} = 2\frac{a}{2R} \Leftrightarrow \text{sinB} + \text{sinC} = 2\text{sinA}.$$

b. Sử dụng công thức tính điện tích ta có: $ah_a = bh_b = ch_c$;

$$\Rightarrow \frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}; \frac{h_a}{h_c} = \frac{c}{a}$$

Chia đẳng thức đã cho cho a ta có: $\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{h_a}{h_b} + \frac{h_a}{h_c} = 2 \Leftrightarrow h_a\left(\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

BT16: Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có các hệ thức:

a. a = b.cosC + c.cosB. b. sinA = sinB.cosC + sinC.cosB.

c. $h_a = 2R.\text{sinB.sinC}$.

Giải:

a. Sử dụng định lí cosin ta chứng minh VP bằng VT

Theo định lí cosin ta có: $\text{cosB} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$; $\text{cosC} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$$\Rightarrow \text{b.cosC} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}; \quad \text{c.cosB} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$$

$$\Rightarrow \text{b.cosC + c.cosB} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a} + \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$$

$$= \frac{a^2+b^2-c^2+a^2+c^2-b^2}{2a} = \frac{2a^2}{2a} = a.$$

c. Theo công thức diện tích ta có: $S = \frac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}$ (1)

$S = \frac{abc}{4R}$, thế vào (1) ta có: $h_a = \frac{2\frac{abc}{4R}}{a} = \frac{bc}{2R} = 2R\frac{b}{2R}.\frac{c}{2R}$ (2)

Lại theo định lí sin ta có: $\frac{b}{2R} = \sin B$; $\frac{c}{2R} = \sin C$ thế vào (2) ta có:

$\Rightarrow h_a = 2R.\sin B.\sin C.$

BT17: Tam giác ABC có $bc = a^2$. Chứng minh rằng:

a. $\sin^2 A = \sin B \sin C$. b. $h_b h_c = h_a^2$ (SBT).

HD: a. Sử dụng định lí sin

Chú ý rằng: Từ đẳng thức đẳng cấp (bất đẳng thức đẳng cấp) đối với cạnh, sử dụng định lí sin, ta có đẳng thức (bất đẳng thức) tương ứng đẳng cấp đối với sinA, sinB, sinC.

b. Sử dụng công thức tính diện tích tam giác

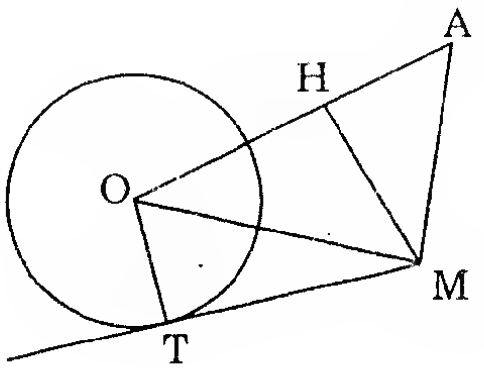
$$ah_a = bh_b = ch_c \Rightarrow a^2h_a^2 = b.c.h_b.h_c.$$

Kết hợp với giả thiết ta suy ra đẳng thức cần chứng minh.

BL: Cho $a^2 + 2b^2 > 2c^2$. Chứng minh: $\sin^2 A + 2\sin^2 B > 2\sin^2 C$

BT18: Cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm A cố định nằ ngoài đường tròn. Tìm tập hợp các điểm M sao cho MA = MT với MT l tiếp tuyến kẻ từ M đến đường tròn (O; R) đã cho.

Giải



Tam giác OMT vuông tại T ta có:

$MO^2 - MT^2 = R^2$ (*)

Gọi I là trung điểm của OA, H là hình chiếu của M lên OA, ta có:

$MO^2 - MA^2 = 2\overline{OA}.\overline{IH}$ (**)

(Xem SGK trang 29)

Lại do $MT^2 = MA^2$

Vì vậy (*), (**) $\Rightarrow 2\overline{OA}.\overline{IH} = R^2 \Leftrightarrow \overline{IH} = \frac{R^2}{2\overline{OA}}$ (1) $\Rightarrow$ H cố định

Vậy tập hợp của M là đường thẳng vuông góc với OA tại H.

BT19: Cho 4 điểm cố định A, B, C, D cố định. Tìm tập những điểm M sao cho: $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k$.

HD:

Cách 1: Sử dụng bài toán ở phần phép nhân vectơ với số thực

Gọi E, F là trung điểm của AB, CD; I là trung điểm của EF ta có:

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ (Bạn đọc hãy chứng minh lại chi tiết)

$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k$

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID})^2 = k$

$\Leftrightarrow 4MI^2 = k - (IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2)$

$\Leftrightarrow MI^2 = \frac{1}{4}[k - (IA^2 + IB^2 + IC^2 + ID^2)]$.

Cách 2: Sử dụng công thức tính độ dài trung tuyến của tam giác

Gọi E, F là trung điểm của AB, CD; I là trung điểm của EF theo công thức tính độ dài đường trung tuyến của tam giác ta có:

$$ME^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$$

$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = 2ME^2 + \frac{AB^2}{2}$ (E là trung điểm của AB)

Tương tự: $MC^2 + MD^2 = 2MF^2 + \frac{CD^2}{2}$ (F là trung điểm của CD)

$\Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 2(ME^2 + MF^2) + \frac{AB^2}{2} + \frac{CD^2}{2}$

Vì I là trung điểm của EF ta có: $ME^2 + MF^2 = 2MI^2 + \frac{EF^2}{2}$

$\Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = 4MI^2 + EF^2 + \frac{AB^2}{2} + \frac{CD^2}{2}$

Đẳng thức đã cho tương đương với: $MI^2 = \frac{1}{4}[k - EF^2 - \frac{AB^2}{2} - \frac{CD^2}{2}]$

* $k > EF^2 + \frac{AB^2}{2} + \frac{CD^2}{2}$: Tập hợp M là đường tròn tâm I.

* $k = EF^2 + \frac{AB^2}{2} + \frac{CD^2}{2}$: Tập hợp M là I.

* $k < EF^2 + \frac{AB^2}{2} + \frac{CD^2}{2}$: Không tồn tại M.

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG ĐƯỜNG TRÒN

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

1. Phương tích của một điểm đối với một đường tròn

Cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm M. Nếu từ điểm M vẽ cát tuyến MAB với đường tròn (O; R) thì giá trị $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = OM^2 - R^2$ không đổi được gọi là phương tích của điểm M đối với đường tròn O và kí hiệu $P^{M}/_{(O)}$

*) $P^{M}/_{(O)} < 0 \Leftrightarrow$ M nằm trong đường tròn

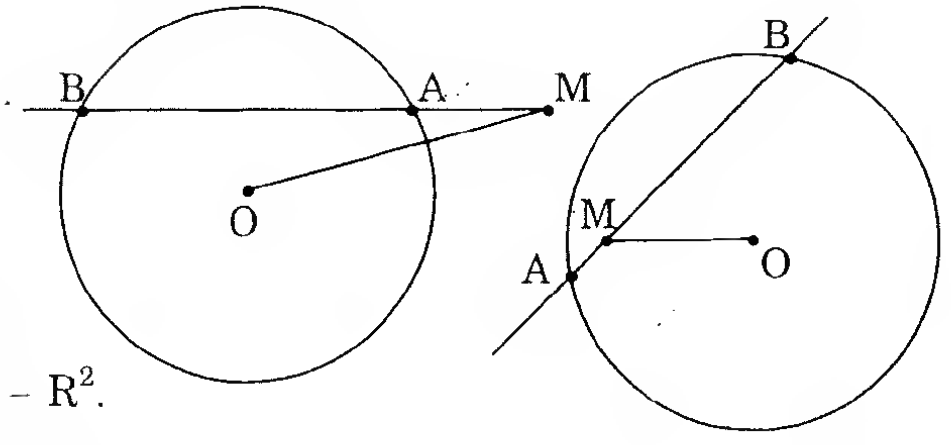
*) $P^{M}/_{(O)} = 0$

$\Leftrightarrow$ M nằm trên đường tròn

*) $P^{M}/_{(O)} > 0$

$\Leftrightarrow$ M nằm ngoài đường tròn

$P^{M}/_{(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = OM^2 - R^2$.



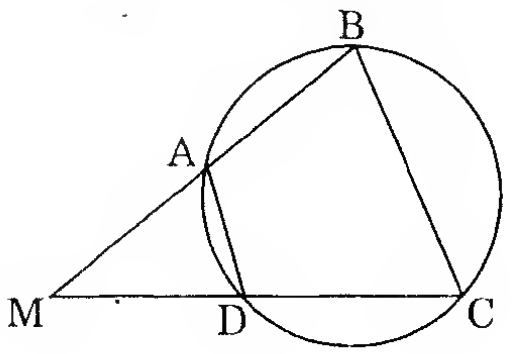
2. Tứ giác nội tiếp đường tròn

Cho tứ giác ABCD có AB và CD cắt nhau tại M. Điều kiện cần và đủ để tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn là

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$

Chú ý rằng nếu AC và BD cắt nhau tại điểm M, thì tứ giác ABCD nội tiếp

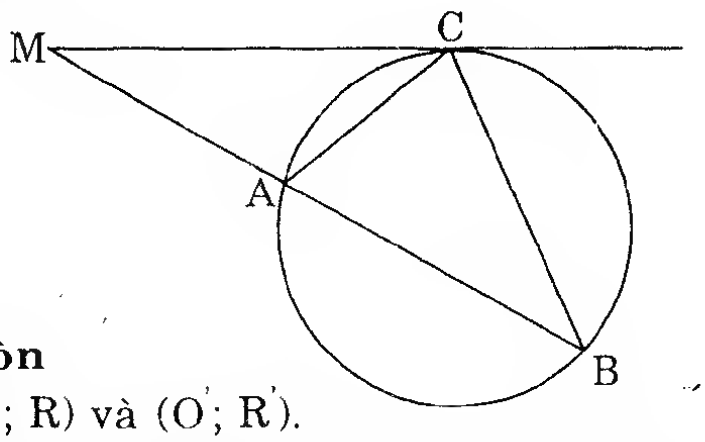
$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$



3. Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn

Cho tam giác ABC. Gọi M là một điểm thuộc AB và nằm ngoài đoạn AB. Điều kiện cần và đủ để đường thẳng MC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại C là:

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MC^2$



4. Trục đẳng phương của 2 đường tròn

Cho 2 đường tròn không đồng tâm (O; R) và (O'; R').
Tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với 2 đường tròn là một đường thẳng Δ vuông góc với đường nối tâm OO' tại điểm H cách trung điểm I của đoạn OO' một đoạn IH mà $\overline{IH} = \dfrac{R^2 - R'^2}{2\overline{OO'}}$

Đường thẳng Δ được gọi là trục đẳng phương của 2 đường tròn.

BÀI TẬP TRONG SÁCH GIÁO KHOA

BT1: Đường thẳng đi qua điểm M cắt đường tròn tâm O bán kính R tại 2 điểm A, B. Tính phương tích của điểm M đối với đường tròn đó khi:

a. Điểm M nằm trong đường trong đường và có MO = d (với d < R).

b. Điểm M nằm ngoài đường tròn và có MO = m (với m > R).

c. Điểm M nằm trên đường tròn.

HD: Để tính phương tích của một điểm đối với 1 đường tròn ta sử dụng định nghĩa: $P^{M}/_{(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = OM^2 - R^2$.

Giải:

a. $P^{M}/_{(O)} = OM^2 - R^2 = d^2 - R^2 < 0$.

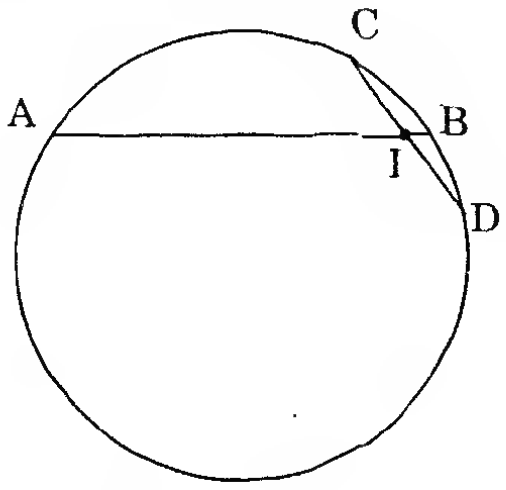
b. $P^{M}/_{(O)} = OM^2 - R^2 = m^2 - R^2 > 0$.

c. $P^{M}/_{(O)} = OM^2 - R^2 = R^2 - R^2 = 0$.

BT2: Hai dây cung AB và CD của một đường tròn cắt nhau tại điểm I nằm trong đường tròn, biết AI = 48cm, IB = 3cm, IC = ID. Tính CD.

HD: Ta chỉ cần tính IC

Giải:



Ta có: IC.ID = IA.IB

$\Leftrightarrow IC^2 = 48.3 = 144$

$\Leftrightarrow IC = 12$

CD = IC + ID = 2IC = 24

BL: Cho đường tròn tâm O bán kính R = 7 và điểm I với OI = 11

a. Gọi IT là tiếp tuyến của (O). T là tiếp điểm. Tính IT.

b. Vẽ cát tuyến IAB sao cho AB = 6,IA < IB. Tính IA, IB.

ĐS: a. $IT = \sqrt{72}$ b. IA = 6, IB = 12.

BT3: Gọi AA', BB', CC' là các đường cao của tam giác ABC các đường cao đồng qui tại trực tâm H. Chứng minh rằng:

$$\overline{HA}.\overline{HA'} = \overline{HB}\,\overline{HB'} = \overline{HC}\,\overline{HC'}$$

HD: Để có $\overline{HA}.\overline{HA'} = \overline{HB}\,\overline{HB'}$ ta phải có tứ giác BA'B'A nội tiếp, điều này là rõ ràng vì $\widehat{AA'B} = \widehat{BB'A} = 90^0$

Giải:

Ta có: $\widehat{AA'B} = \widehat{BB'A} = 90^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác BA'B'A nội tiếp được

Lại do AA' cắt BB' tại H

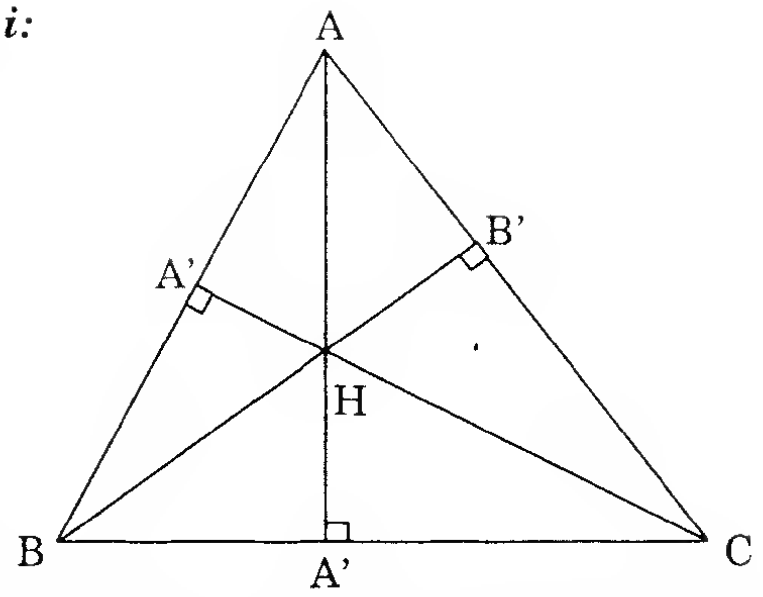
$\Rightarrow \overline{HA}.\overline{HA'} = \overline{HB}\,\overline{HB'}$ (1)

Tương tự ta có:

$\overline{HA}.\overline{HA'} = \overline{HC}\,\overline{HC'}$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow \overline{HA}.\overline{HA'} = \overline{HB}\,\overline{HB'}$

$= \overline{HC}\,\overline{HC'}$.



BL: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O, R). Một đường tròn đi động qua A và trung điểm M của BC cắt BC tại E và cắt (O) tại F. Gọi K là giao điểm của AF và BC. Chứng minh rằng: $\overline{KM}.\overline{KE} = \overline{KB}.\overline{KC}$; $MB^2 = MC^2 = \overline{ME}.\overline{MK}$

BT4: Trên một đường thẳng cho 3 điểm A, B, C sao cho B nằm giữa A và C. Dựng các đường tròn đường kính AB và AC. Từ B đựng đường thẳng vuông góc với AC cắt đường tròn lớn tại D và E, Từ C dựng các tiếp tuyến CI và CK với đường tròn nhỏ.

Chứng minh rằng 4 điểm D, E, I, và K nằm trên một đường tròn.

HD:

Cách 1: Chứng minh: DEKI là hình thang cân. Chú ý là mọi hình thang cân đều nội tiếp được

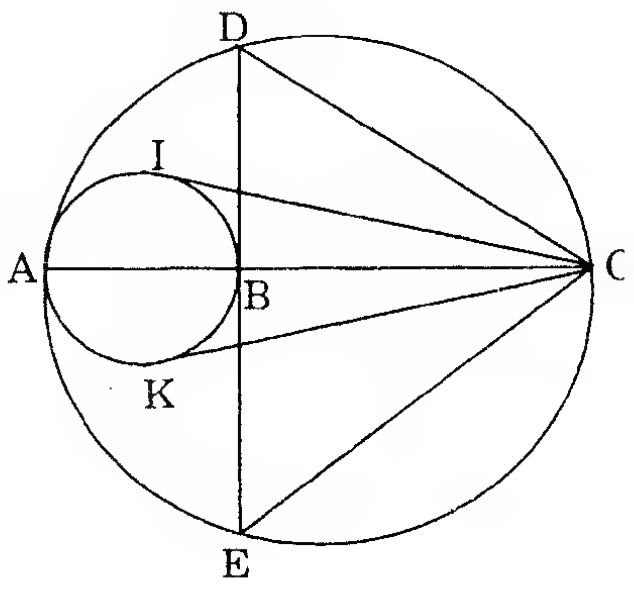
Cách 2: $P^{C}/_{(AB)} = CB.CA = CI^2 = CK^2$

Mặt khác tam giác ACD vuông tại D có đường cao DB $\Rightarrow CB.CA = CD^2$

Tương tự $CB.CA = CE^2$

$\Rightarrow CI = CD = CK = CE$

Vậy 4 điểm D, E, I và K nằm trên đường tròn tâm C bán kính bằng $\sqrt{CB.CA}$.



BT5: Cho 2 đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B. Gọi M là một điểm thuộc đường thẳng AB và nằm ngoài đoạn AB

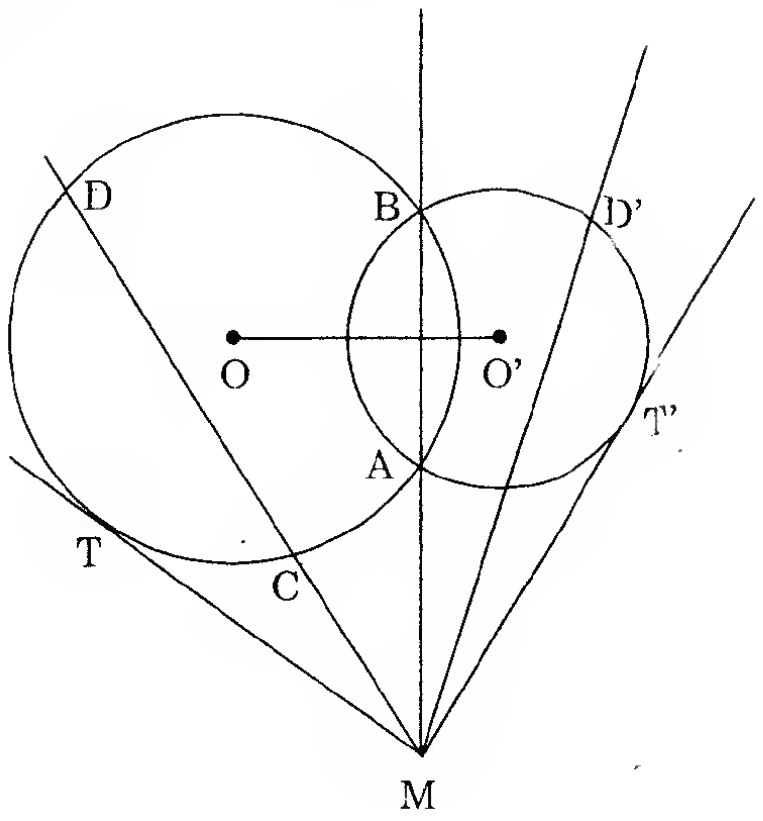
a. Qua M vẽ 2 tiếp tuyến MT và MT' với (O) và(O'). Chứng minh rằng MT = MT'.

b. Qua M vẽ 2 cát tuyến MCD, MC'D' với (O) và(O'). Chứng minh rằng tứ giác CDD'C' nội tiếp đường tròn.

Giải:

a. AB là trục đẳng phương của 2 đường tròn (O) và (O')

$M \in AB \Rightarrow P^{M}/_{(O)} = P^{M}/_{(O')}$ (*)



Mặt khác:

$P^{M}/_{(O)} = MT^2$

$P^{M}/_{(O')} = MT'^2$

$\Rightarrow MT^2 = MT'^2 \Leftrightarrow MT = MT'$.

b. Ta có:

$P^{M}/_{(O)} = \overrightarrow{MC}\overrightarrow{MD}$

$P^{M}/_{(O')} = \overrightarrow{MC'}\overrightarrow{MD'}$

Do (*) nên

$\overrightarrow{MC}\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC'}\overrightarrow{MD'} \Rightarrow$ Tứ giác CDD'C' nội tiếp đường tròn.

Chú ý: Để chứng minh tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn, ta tìm giao điểm M của AB và CD (hoặc AC và BD) sau đó chứng minh:

$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$ (hoặc $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$).

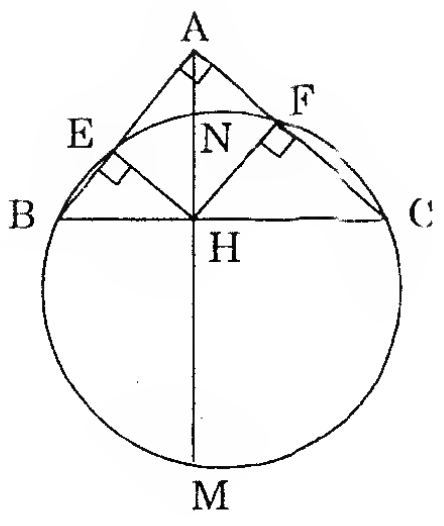
BL1: Tam giác ABC vuông tại A và đường cao AH. Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của H lên AB, AC. Chứng minh rằng khi A, H cố định còn C, B thay đổi thì:

a. Tứ giác BCFE nội tiếp đường tròn.

b. Đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCFE luôn đi qua 2 điểm cố định.

HD:

a. Sử dụng các hệ thức lượng trong các tam giác vuông AHB với đường cao HE, tam giác vuông AHC với đường cao HF để chứng minh: $\overline{AE}\overline{AB} = \overline{AF}\overline{AC} = AH^2$.



b. Gọi M, N là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCFE và AH

Hãy chứng minh:

$\overline{AM}.\overline{AN} = AH^2 \Leftrightarrow \overline{HM} + \overline{HN} = \overline{AH}$

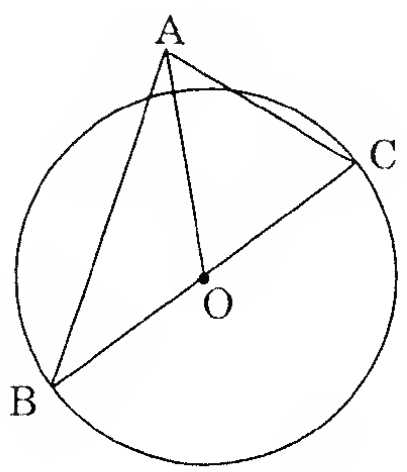
$\overline{HM}.\overline{HN} = -AH^2$

Từ đó hãy tính $\overline{HM}$, $\overline{HN}$ theo AH.

BT6: Cho đường tròn O cố định có bán kính R và một điểm A cố định không nằm trên đường tròn. Gọi BC là đường kính thay đổi của đường tròn (O; R). Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đi qua một điểm cố định khác A.

HD: Liên hệ các điểm, đường cố định ta có thể dự đoán điểm cố định cần tìm là giao điểm của AO và đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC. Có thể dự đoán bằng cách suy luận khác như sau: Khi BC, A thẳng hàng thì đường tròn (C) suy biến thành đoạn thẳng BC, vì vậy dự đoán điểm cố định cần tìm là giao điểm của AO và đường tròn (C).

Giải:



Gọi I là giao điểm của AO và đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC.

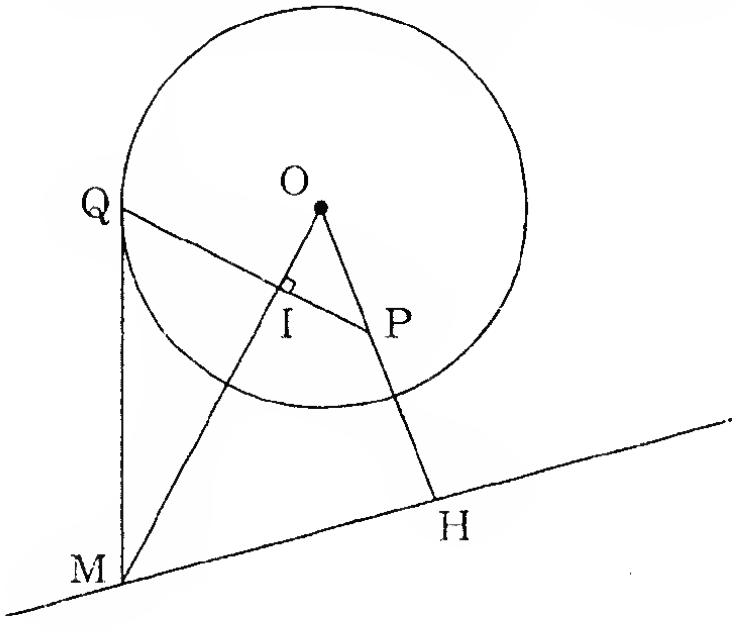
Ta có

$$\overline{OA}\,\overline{OI} = \overline{OB}\,\overline{OC} = -R^2$$

$$\Rightarrow \overline{OI} = -\frac{R^2}{\overline{OA}} \text{ không đổi}$$

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đi qua một điểm cố định I khác A.

BL: Cho điểm P nằm trong đường tròn tâm O bán kính R, Q là điểm tuỳ ý trên đường tròn. Đường thẳng qua O vuông góc với PQ cắt tiếp tuyến của (O) tại Q ở M. Chứng minh rằng M thuộc một đường thẳng cố định.



HD: Gọi I là giao điểm của OM và OQ, H là hình chiếu vuông góc của M lên OP.

Hãy chứng minh:

$\overline{OI}\,\overline{OP} = R^2 \Rightarrow$ H cố định.

Vậy M thuộc đường thẳng cố định ∆ vuông góc với OP tại H.

BT7: Tam giác ABC vuông tại A có AB = c; AC = b đường cao AH. Tìm phương tích của điểm H đối với đường tròn đường kính AB, BC, CA.

Giải:

Vì $\widehat{AHB} = 90^0 \Rightarrow$ H nằm trên đường tròn đường kính AB

Vậy phương tích của điểm H đối với đường tròn đường kính AB bằng 0

Tương tự phương tích của điểm H đối với đường tròn đường kính CA bằng 0.

Kí hiệu (C) là đường tròn đường kính BC ta có: $P^{H}/_{(C)} = \overline{HB}.\overline{HC}$

Vì tam giác ABC vuông tại A nên chân đường cao H thuộc đoạn thẳng BC

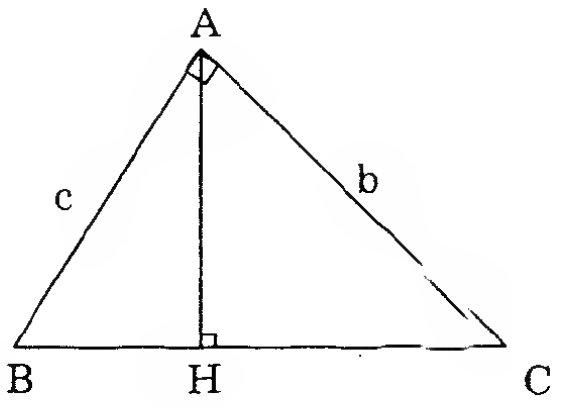
$\Rightarrow \overline{HB}.\overline{HC} = -HB.HC$

Lại do: $BH.HC = AH^2$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2.c^2}$$

$$\Rightarrow AH^2 = \frac{b^2.c^2}{b^2 + c^2}.$$

$$\Rightarrow P^{H}/_{(C)} = -\frac{b^2.c^2}{b^2 + c^2}.$$



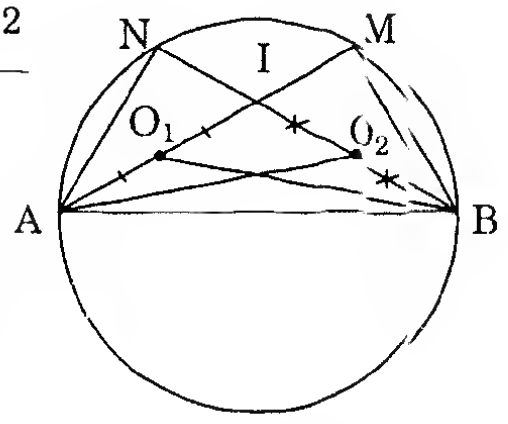
BL1: Cho đường tròn (O; R) đường kính AB và một điểm M bất kì. Chứng minh rằng $P^{M}/_{(O)} = \overline{MA}.\overline{MB}$.

BL2: Cho nửa đường tròn đường kính AB có 2 dây AM và BN cắt nhau tại I. Tính $P^{A}/_{(IBM)} + P^{B}/_{(IAN)}$ theo $R = \frac{AB}{2}$.

HD: Gọi O_1, O_2 lần lượt là trung điểm IA, IB

$$P^{A}/_{(IBM)} + P^{B}/_{(IAN)} = AO_2^2 - \frac{IB^2}{4} + BO_1^2 - \frac{IA^2}{4}$$

$$= AO_2^2 + BO_1^2 - \frac{1}{4}(IB^2 + IA^2)$$



Sử dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến để tính VP của đẳng thức trên theo các cạnh của tam giác AIB.

BL3: Cho đường tròn tâm O bán kính R = 3, đường tròn tâm O_1 bán kính $R_1 = 6$ tiếp xúc ngoài nhau tại điểm A và dây AB của (O) có độ dài bằng 3.

a. Tính $P^{B}/_{(O_1)}$ và đoạn BT biết BT tiếp xúc với (O_1) tại T.

b. Gọi D là điểm đối xứng với B qua O. Tính $P^{D}/_{(O_1)}$.

ĐS: $P^{B}/_{(O_1)} = 27$; $BT = 3\sqrt{3}$; $P^{D}/_{(O_1)} = 81$.

BT8: Cho 2 đường tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài tại K. Tiếp tuyến chung với (O_1) và (O_2) tiếp xúc với (O_1) tại A và (O_2) tại D (các điểm A, D đều khác K). Gọi AB là đường kính của (O_1)

a. Chứng minh 3 điểm B, K, D thẳng hàng.

b. Từ B kẻ tiếp tuyến BN đến (O_2). Chứng minh rằng BN = BA.

HD: Vì $\widehat{BKA} = 90^0$, nên để chứng minh B, K, D thẳng hàng ta chỉ cần chứng minh $\widehat{AKD} = 90^0$.

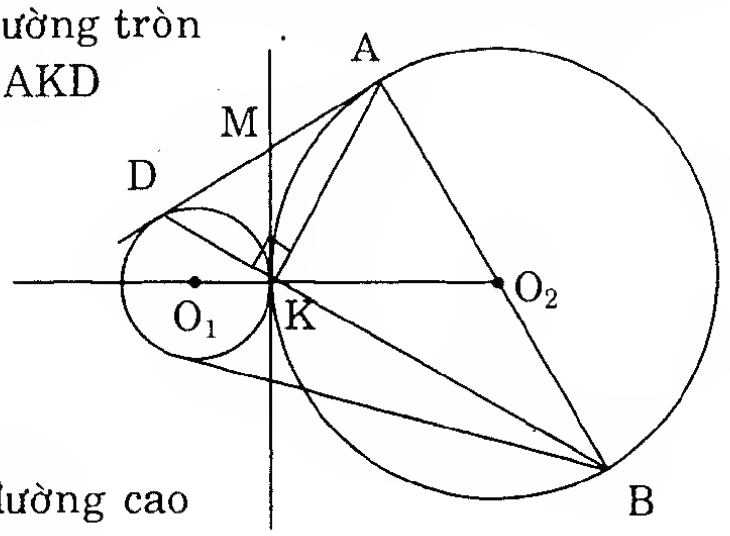
Để chứng minh tam giác vuông có nhiều cách, một trong những cách đó là chứng minh trung tuyến ứng với cạnh đáy bằng nửa cạnh đáy.

Giải:

a. Gọi M là giao điểm của tiếp tuyến chung tại K với 2 đường tròn và AD.

$\Rightarrow$ KM là trục đẳng phương của 2 đường tròn

$\Rightarrow$ MA = MD = MK $\Rightarrow$ Tam giác AKD vuông tại K $\Rightarrow \widehat{AKD} = 90^0$



Mặt khác $\widehat{BKA} = 90^0$,

$\Rightarrow \widehat{BKD} = 180^0$

$\Rightarrow$ 3 điểm B, K, D thẳng hàng.

b. $P^{B}/_{(O_2)} = BN^2 = BK.BD$ (1)

Mặt khác Δvuông ABD có AK là đường cao vì vậy $BK.BD = BA^2$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow BN^2 = BA^2 \Rightarrow BN = BA$.

BL: Cho đường tròn (O) tâm O đường kính AB ,M là một điểm bất kì trên (O). Đường tròn tâm M tiếp xúc với AB tại P, cắt (O) tại C và D. CD cắt MP tại I. Chứng minh I là trung điểm của MP.

HD: Gọi Q, N là giao điểm thứ 2 của MP với (O) và (M)

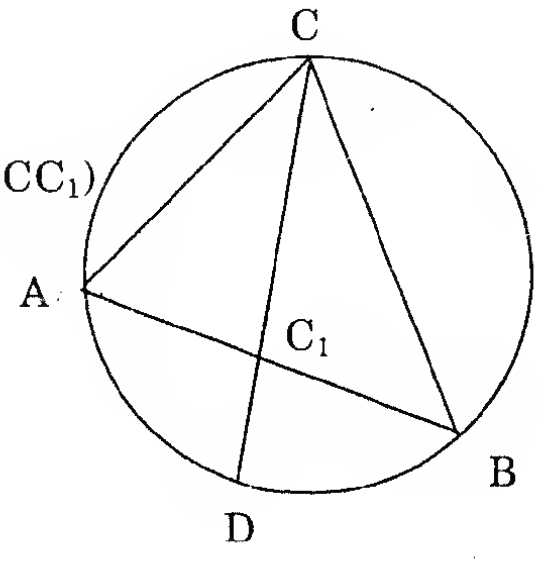
Vì AB là trục đẳng phương của (O) và (M) nên

$\overline{IM}.\overline{IQ} = \overline{IP}.\overline{IN} \Leftrightarrow \overline{IM}(\overline{IP} + \overline{PQ}) = \overline{IP}(\overline{IM} + \overline{MN})$.

BT9: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Đường trung tuyến CC_1 cắt đường tròn tại điểm thứ hai D. Chứng minh rằng:

$$CA^2 + CB^2 = 2CC_1.CD.$$

Giải:



Tứ giác ADBC nội tiếp ta suy ra:

$$C_1A.C_1B = C_1D.C_1C \Leftrightarrow \frac{AB}{2}\frac{AB}{2} = CC_1(CD - CC_1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{AB^2}{4} = CC_1.CD - CC_1^2 \quad (*)$$

Mặt khác do CC_1 là trung tuyến của tam giác ABC ta có: $CC_1^2 = \frac{CA^2 + CB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$

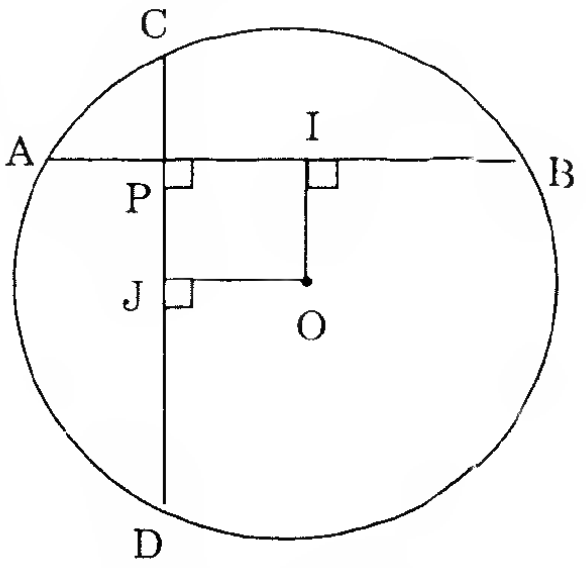
Thế vào (*) ta có:

$$\frac{AB^2}{4} = CC_1.CD - \frac{CA^2 + CB^2}{2} + \frac{AB^2}{4} \Leftrightarrow CA^2 + CB^2 = 2CC_1.CD$$

BL: Qua điểm P cố định nằm trong đường tròn tâm O bán kính R kẻ 2 dây cung vuông góc AB, CD.

a. Tính $AB^2 + CD^2$ theo R và OP.

b. Chứng minh rằng giá trị biểu thức $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm P.



HD:

a. $AB^2 + CD^2 = 4(R^2 - OI^2) + 4(R^2 - OJ^2)$

$= 8R^2 - 4(OI^2 + OJ^2) = 8R^2 - 4OP^2.$

b. $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$

$= (\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA})^2 + 2\overrightarrow{PB}.\overrightarrow{PA} +$

$(\overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PC})^2 + 2\overrightarrow{PD}.\overrightarrow{PC}$

$= AB^2 + CD^2 + 4P^{P}/_{(O)}$

$= 8R^2 - 4OP^2 + 4(OP^2 - R^2) = 4R^2.$

BT10: Cho đường tròn tâm O đường kính AB = 2R. Trên đường thẳng AB lấy điểm P sao cho PO = 2R. Một cát tuyến tùy ý qua P cắt đường tròn tại C, D. Các tiếp tuyến tại C, D với đường tròn cắt nhau tại M. Gọi H là hình chiếu của M lên AB.

a. Chứng minh rằng ngũ giác CMDOH nội tiếp được trong đường tròn đường kính MO.

b. Chứng minh rằng khi cát tuyến PCD quay quanh P thì tích PC. PD không thay đổi. Tính tích đó theo R.

c. Chứng minh rằng tích PH. PO cũng không đổi và từ đó hãy chứng tỏ rằng điểm H cố định khi PCD quay quanh P.

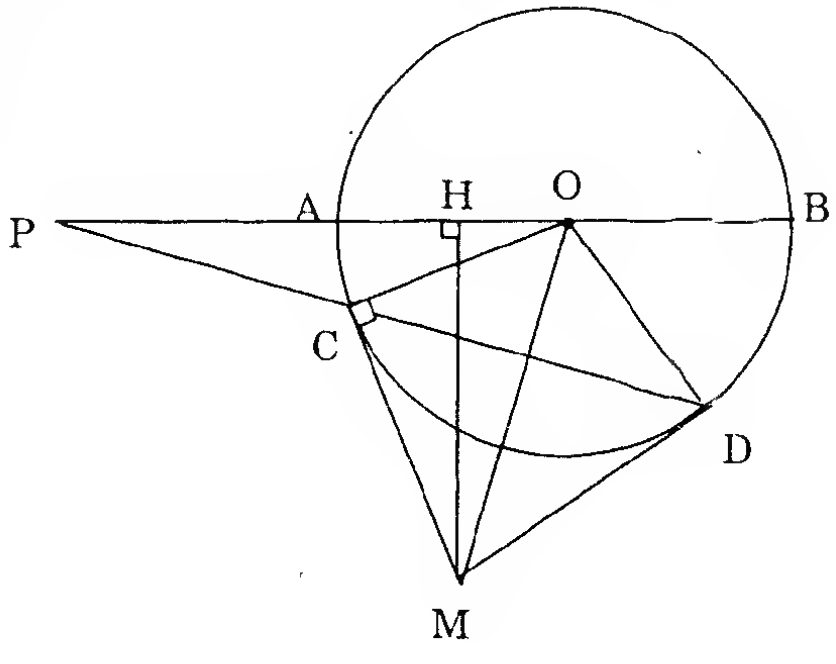
Giải:

a. Vì $\widehat{ODM} = \widehat{OCM} = \widehat{OHM} = 90^0$

$\Rightarrow$ Ngũ giác CMDOH nội tiếp được trong đường tròn đường kính MO

b. Tacó: $PC.PD = PB.PA = R.3R = 3R^2$

c. Theo câu a CMDOH nội tiếp được trong đường tròn (C) đường kính MO



$\Rightarrow P^{P}/_{(C)} = PH.PO = PC.PD$

$= 3R^2$

$\Rightarrow$ Tích PH.PO không đổi

Ta có: $\overline{PH}\,\overline{PO} = 3R^2$

$\Leftrightarrow \overline{PH} = \dfrac{3R^2}{\overline{PO}} = \dfrac{3R^2}{2R} = \dfrac{3}{2}R$

$\Rightarrow$ H cố định.

BL: Cho bốn điểm A, B, C, D theo thứ tự đó cùng thuộc 1 đường thẳng d. Hai đường tròn di động qua A, B và C, D cắt nhau tại M, N. Chứng minh rằng:

a. Đường thẳng MN qua điểm cố định K.

b. Các tiếp điểm của các tiếp tuyến với 2 đường tròn trên vẽ từ K thuộc một đường tròn cố định.

HD: a. Từ: $\overline{KA}.\overline{KB} = \overline{KC}.\overline{KD}$; Hãy chứng minh $\overline{KB} = \dfrac{\overline{BC}.\overline{BD}}{\overline{DA} - \overline{BC}}$.

b. Hãy chứng minh các tiếp điểm nói trên thuộc đường tròn tâm K đường kính $\sqrt{\overline{KA}.\overline{KB}}$.

BT11: Hãy trình bày cách dựng trục đẳng phương của 2 đường tròn trong các trường hợp sau:

a. Hai đường tròn cắt nhau tại 2 điểm A, B.

b. Hai đường tròn tiếp xúc nhau tại T.

c. Hai đường tròn không đồng tâm và không có điểm chung.

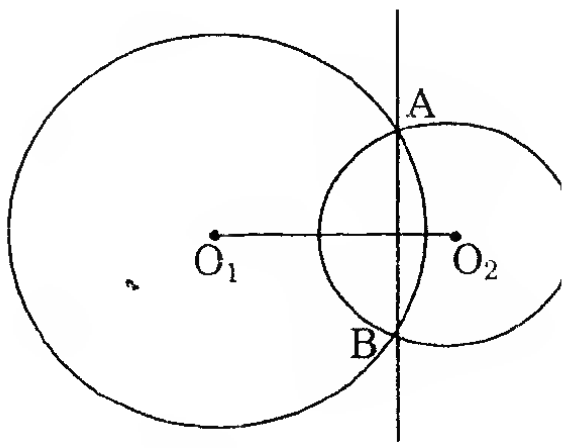
HD: Vì trục đẳng phương vuông góc với đường nối tâm, nên để xác định trục đẳng phương của 2 đường tròn ta chỉ cần xác định một điểm thuộc trục đẳng phương.

Giải:

a. Vì $P^{A}/_{(O_1)} = P^{A}/_{(O_2)} = 0$

$P^{B}/_{(O_1)} = P^{B}/_{(O_2)} = 0$

⇒ AB là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2).



b. Vì

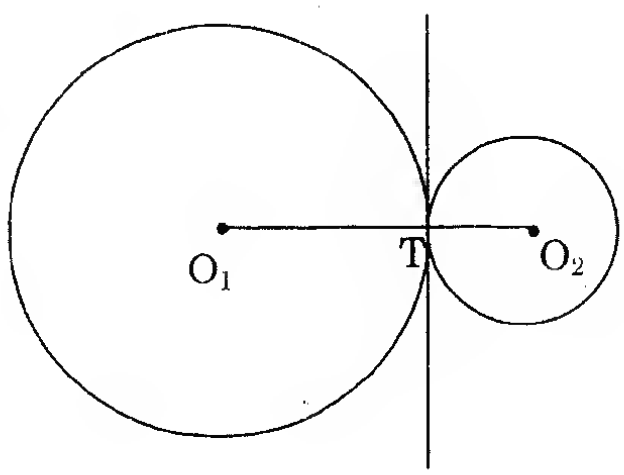
$P^{T}/_{(O_1)} = P^{T}/_{(O_2)} = 0$

⇒ Trục đẳng phương của 2 đường tròn là đường thẳng qua T và vuông góc với O_1O_2.

c. Vẽ đường tròn thứ ba (O_3) sao cho (O_3) cắt (O_1) tại AB, cắt (O_2) tại CD và AB cắt CD tại I

Vì AB là trục đẳng phương của (O_3) và (O_1).

⇒ $P^{I}/_{(O_1)} = P^{I}/_{(O_3)}$ (1)



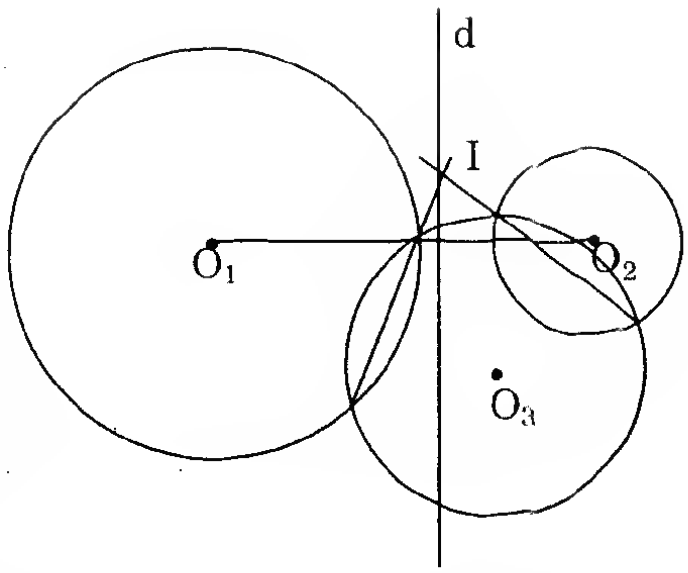
Tương tự CD là trục đẳng phương của (O_3) và (O_2)

$\Rightarrow P_{I/(O_2)} = P_{I/(O_3)}$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow P_{I/(O_1)} = P_{I/(O_2)}$

$\Rightarrow$ I thuộc trục đẳng phương của (O_1) và (O_2).

Vậy từ I ta kẻ đường thẳng d vuông góc với O_1O_2 thì d là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2)



BT12: Cho tam giác ABC với AA', BB', CC' là 3 đường cao và H là trực tâm. Chứng minh rằng đường thẳng AH là trục đẳng phương của 2 đường tròn có các đường kính HB, HC.

Chú ý: Để chứng minh đường thẳng d là trục đẳng phương của 2 đường tròn, ta chứng minh trên d có 2 điểm phân biệt có cùng phương tích đối với 2 đường tròn, hoặc chứng minh d vuông góc với đường nối tâm và trên d tồn tại một điểm có cùng phương tích đối với 2 đường tròn.

Giải:

Vì H là giao điểm của 2 đường tròn (C_1) đường kính HB và đường tròn (C_2) đường kính HC

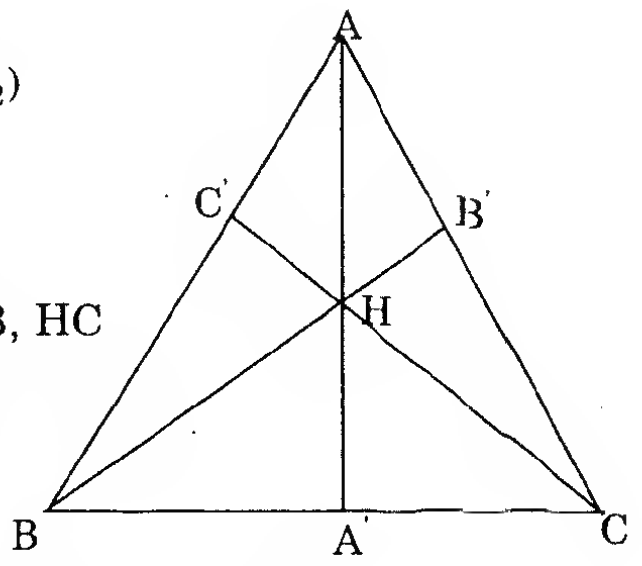
$\Rightarrow$ H thuộc trục đẳng phương d của 2 đường tròn

Gọi O_1, O_2 lần lượt là trung điểm của HB, HC

$\Rightarrow O_1, O_2$ lần lượt là tâm của(C_1) (C_2)

$\Rightarrow O_1O_2$ // BC (đường trung bình của tam giác HBC)

$AH \perp BC \Rightarrow AH \perp O_1O_2$



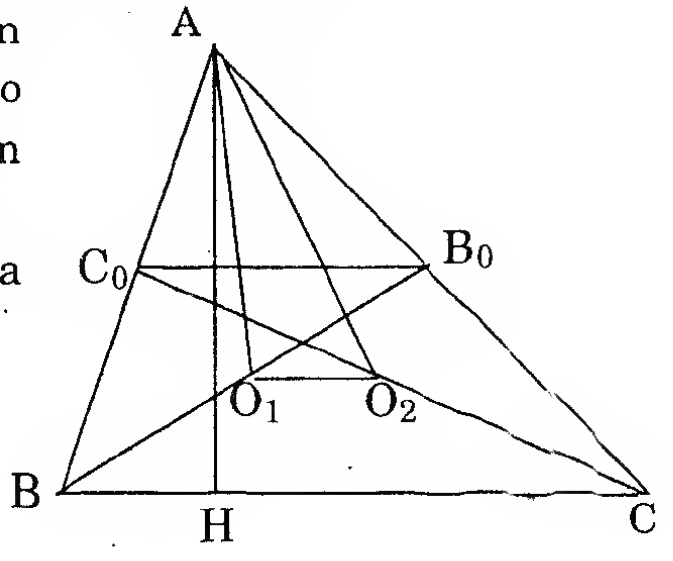
Vậy AH là trục đẳng phương của 2 đường tròn (C_1) (C_2).

BL1: Cho tam giác ABC với 2 trung tuyến BB_0 và CC_0. Chứng minh rằng đường cao AH là trục đẳng phương của 2 đường tròn đường kính BB_0 và CC_0

HD: Gọi O_1, O_2 lần lượt là trung điểm của BB_0, CC_0

Hãy chứng minh $AH \perp O_1O_2$

Hãy sử dụng công thức:



$$P^{M}/_{(O)} = OM^2 - R^2,$$

kết hợp với công thức tính độ dài trung tuyến của tam giác để chứng minh:

$$A/_{(O_1)} = P^{B}/_{(O_2)} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{4}$$

BL2: Cho tam giác ABC với 2 trung tuyến BB_0 và CC_0 và đường cao AH. Gọi M là giao điểm của đường tròn đường kính BB_0 và AH. Chứng minh $C_0M \perp CM$

HD: Sử dụng bài luyện 1, vì AH là trục đẳng phương của 2 đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt có đường kính BB_0 và CC_0, vì vậy

$P^{M}/_{(O_1)} = P^{M}/_{(O_2)} = 0 \Rightarrow M \in (O_2)$, từ đó suy ra đpcm.

BT13: Trên cạnh AB của hình bình hành ABCD, cho 2 điểm đi động A', B'. Các đường thẳng CA', DB' cắt nhau tại P. Chứng minh rằng trục đẳng phương của 2 đường tròn (PAA') và (PBB') luôn luôn song song với đường thẳng BC.

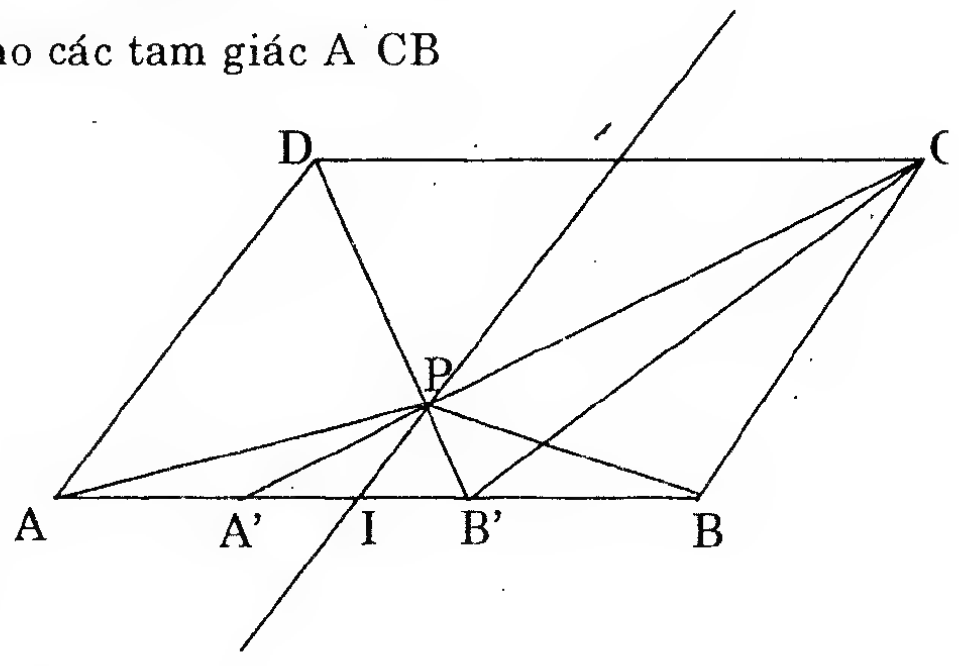
Giải:

Vì 2 đường tròn (PAA') và (PBB') có điểm chung là P

Từ P kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB tại I

Ta cần chứng minh $\overline{IA}.\overline{IA'} = \overline{IB}.\overline{IB'}$

Sử dụng định lí Ta-let cho các tam giác A'CB và B'AD ta có:



$$\frac{IA'}{A'B} = \frac{PA'}{A'C} \quad (1)$$

$$\frac{IB'}{B'A} = \frac{PB'}{B'D} \quad (2)$$

Mặt khác:

$$\frac{PA'}{A'C} = \frac{PB'}{B'D} \quad (3)$$

$$(1), (2) \text{ và } (3) \Rightarrow \frac{\overline{IA'}}{\overline{A'B}} = \frac{\overline{IB'}}{\overline{B'A}} \Rightarrow \frac{\overline{IA'}}{\overline{A'B} + \overline{IA'}} = \frac{\overline{IB'}}{\overline{B'A} + \overline{IB'}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{IA'}}{\overline{IB}} = \frac{\overline{IB'}}{\overline{IA}} \Leftrightarrow \overline{IA'}.\overline{IA} = \overline{IB'}.\overline{IB}$$

$\Rightarrow$ d là trục đẳng phương của 2 đường tròn (PAA') và (PBB')

BL1: Cho tứ giác ABCD có các cạnh AB và CD cắt nhau tại I, AD và BC cắt nhau tại K. Gọi CC', DD', H là các đường cao và trực tâm của tam giác CDK, O_1 và O_2 lần lượt là trung điểm của AC, BD. Kí hiệu (X, XY) là đường tròn tâm X bán kính XY.

Chứng minh rằng :

i. $P_{H/(O_1,O_1A)} = \overline{HC}.\overline{HC'}$; $P_{H/(O_2,O_2B)} = \overline{HD}.\overline{HD'}$.

ii. $P_{H/(O_1,O_1A)} = P_{H/(O_2,O_2B)}$.

Chứng minh rằng H thuộc trục đẳng phương của 2 đường tròn $(O_1; O_1A)$ và $(O_2; O_2B)$.

Giải:

i. $\widehat{ACC'} = 90^0 \Rightarrow C' \in (O_1; O_1A)$

Lại đo $C \in (O_1; O_1A) \Rightarrow P_{H/(O_1,O_1A)} = \overline{HC}.\overline{HC'}$; (1)

Tương tự $\widehat{DDB} = 90^0 \Rightarrow D' \in (O_2; O_2B)$

$\Rightarrow P_{H/(O_2,O_2B)} = \overline{HD}.\overline{HD'}$. (2)

ii. Vì bốn điểm C, D, C', D' nội tiếp (do $\widehat{CC'D} = \widehat{CD'D} = 90^0$) nên $\overline{HD}.\overline{HD'} = \overline{HC}.\overline{HC'}$

Kết hợp với(1) và (2) $\Rightarrow P_{H/(O_1,O_1A)} = P_{H/(O_2,O_2B)}$

$\Rightarrow$ H thuộc trục đẳng phương của 2 đường tròn $(O_1; O_1A)$ và $(O_2; O_2B)$.

BL2: Cho đường tròn tâm O, AB và CD là 2 đường kính. Tiếp tuyến với (O) tại B cắt AC tại P, PD cắt (O) tại điểm thứ hai G.

a. Gọi I , I' lần lượt là trung điểm của PA, PC. Chứng minh:

i. O, B, C, I cùng thuộc đường tròn (ϖ).

ii. O, A, G, I' cùng thuộc đường tròn (ϖ').

b. Chứng minh rằng OP là trục đẳng phương của (ϖ) và (ϖ').

Giải:

i. Ta có : OI là đường trung bình của tam giác ABP $\Rightarrow$ OI // PB

Lại do PB $\perp$ AB $\Rightarrow \widehat{IOB} = 90^0$

Mặt khác $\widehat{BCI} = 90^0$ ($\widehat{BCA} = 90^0$)

$\Rightarrow$ O, B, C, I cùng thuộc đường tròn (ϖ).

ii. 1. I'C = I'G (trung tuyến của tam giác vuông) OC = OD = R

$\Rightarrow$ OI' là trung trực của CG $\Rightarrow \widehat{COI'} = \widehat{I'OG}$

OI' là đường trung bình của tam giác CDP $\Rightarrow \widehat{COI'} = \widehat{CDG}$

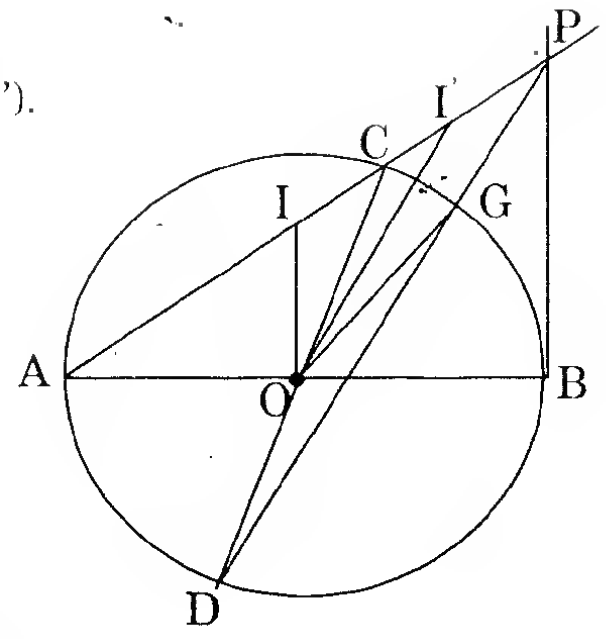
Mặt khác $\widehat{I'AG} = \widehat{CDG}$ (cùng chắn cung CD)

$\Rightarrow \widehat{I'AG} = \widehat{I'OG}$

$\Rightarrow$ O, A, G, I' cùng thuộc đường tròn (ϖ').

2. $O \in (\varpi)$ và $O \in (\varpi')$

$\Rightarrow P^{O}/_{(\varpi)} = P^{O}/_{(\varpi')} = 0$ (1)



Mặt khác:

$P^{P}/_{(\varpi)} = \overline{PI}.\overline{PC}$, $P^{P}/_{(\varpi')} = \overline{PA}.\overline{PI'}$

Ta có: $\overline{PI}.\overline{PC} = \frac{1}{2}\overline{PA}.2\overline{PI'} = \overline{PA}.\overline{PI'}$

$\Rightarrow P^{P}/_{(\varpi)} = P^{P}/_{(\varpi')}$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow$ OP là trục đẳng phương của (ϖ'), (ϖ).

BÀI TẬP BỔ SUNG

3T14: Qua một điểm M lấy trên dây cung chung AB của hai đường tròn cắt nhau, người ta kẻ dây cung CD trong đường tròn thứ nhất và kẻ dây cung EG trong đường tròn thứ hai. Chứng minh rằng tứ giác CGDE nội tiếp trong một đường tròn (SBT).

HD: Hãy chứng minh $\overline{ME}.\overline{MG} = \overline{MC}.\overline{MD}$, với chú ý rằng M thuộc trục đẳng phương của 2 đường tròn.

3T15: Cho đường thẳng Δ và 2 điểm A, B ở về cùng phía đối với Δ. Hãy dựng đường tròn qua A, B và tiếp xúc với Δ.

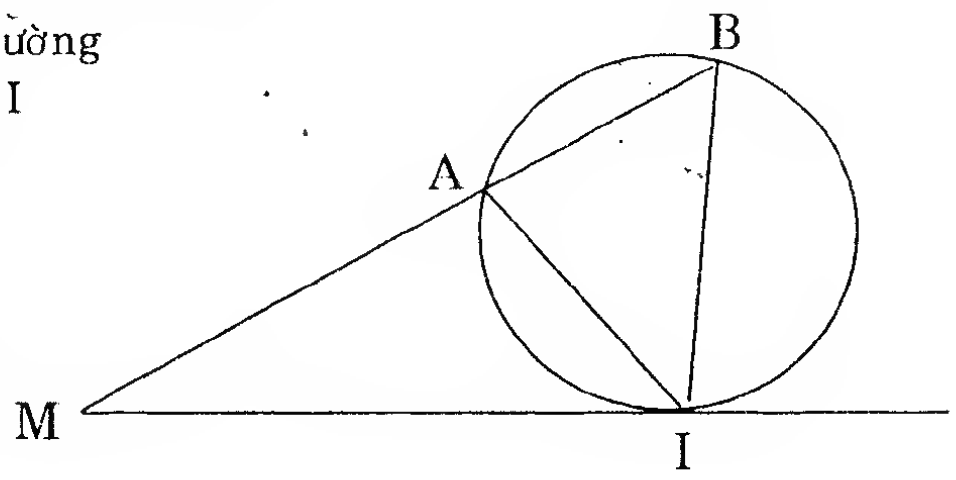
Giải:

* Nếu AB // Δ, dựng đường trung trực của AB cắt Δ tại I

Đường tròn qua ABI là đường tròn cần dựng

(Bạn đọc hãy chứng minh điều này).

* Nếu AB không song song với Δ



Phân tích:

Gọi M là giao điểm của AB và Δ, và đường tròn cần dựng tiếp xúc với Δ tại I ta có: $MA.MB = MI^2 \Leftrightarrow MI = \sqrt{MA.MB} = k$ không đổi

Cách dựng:

Dựng M là giao điểm của AB và Δ

Dựng đường tròn tâm M bán kính bằng $\sqrt{MA.MB}$ = k không đổi đường tròn này cắt Δ tại điểm I.

Dựng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABI, đó chính là đường tròn cần dựng .

Chứng minh:

Vì M nằm ngoài đoạn AB và $MA.MB = MI^2$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABI tiếp xúc với Δ

Biện luận:

Rõ ràng bài toán có 2 nghiệm hình

Chú ý rằng ta có thể đựng độ đài $\sqrt{MA.MB}$ như sau: Giả sử A ở giữa M, B

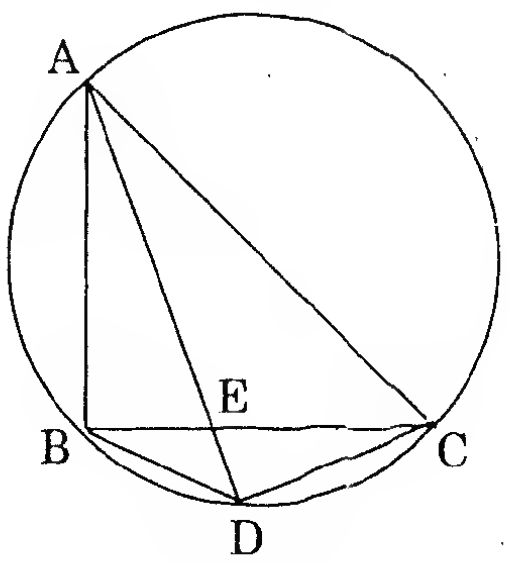
Dựng đường tròn (C) đường kính MB, dựng đường thẳng qua A vuông góc với MB cắt (C) tại K .

Bạn đọc hãy chứng minh rằng $MK = \sqrt{MA.MB}$.

BT16: Cho tam giác ABC. Gọi D, E là giao điểm của đường phân giác trong của góc A với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và với cạnh BC

Chứng minh rằng DB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE và DC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACE.

Giải:



ΔABD đồng dạng ΔBED (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BD}{ED} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow BD^2 = ED.AD$$

Vì điểm E nằm giữa A và D

$\Rightarrow BD^2 = \overline{DE}.\overline{DA}$

⇒ DB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE

Vì AD là phân giác của góc BAC nên

D là trung điểm của cung BC

$\Rightarrow DC^2 = DB^2 \Rightarrow DC^2 = \overline{DE}.\overline{DA}$

Vậy DC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACE.

Chú ý: Cho tam giác ABC và điểm M thuộc đường thẳng AB và nằm ngoài đoạn AB. Muốn chứng minh đường thẳng MC tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta chứng minh : $MC^2 = MA.MB$.

BL1: Cho tam giác ABC vuông tại A, AH là đường cao. Trên đường tròn tâm C bán kính CA lấy điểm M không nằm trên đường thẳng BC. Chứng minh rằng đường thẳng CM tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác BHM.

HD: Hãy chứng minh $CM^2 = \overline{CH}.\overline{CB}$.

BL2: Cho đường tròn (O) tâm O. A, B là 2 điểm phân biệt trên (O), I là trung điểm của cung AB. Hai dây IC, ID của (O) cắt AB lần lượt tại M, N. Chứng minh rằng:

a. IA tiếp xúc với đường tròn (AMC); IB tiếp xúc với đường tròn (BND).

b. Tứ giác CMND nội tiếp được.

c. Hai đường tròn (AMC) và (AND) tiếp xúc tại A.

HD: a. Hãy chứng minh 2 tam giác AMI và CAI đồng dạng, từ đó suy ra

$$IA^2 = \overline{IM}.\overline{IC}.$$

b. Từ $IA^2 = IB^2$ và kết quả ở câu a suy ra: $\overline{IM}.\overline{IC} = \overline{IN}.\overline{ID}$.

BT17: Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi M là trung điểm của đoạn BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AOM cắt đường thẳng BC tại điểm thứ hai là E và cắt đường tròn (O) tại D. Dây cung AD cắt BC tại F

a. Chứng minh rằng $\overline{FB}.\overline{FC} = \overline{FE}.\overline{FM}$

b. Từ đẳng thức trên, hãy chứng minh $\overline{EB}.\overline{EC} = \overline{EF}.\overline{EM}$

c. Chứng minh rằng EA tiếp xúc với đường tròn (O) và tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác AMF (SBT).

HD: a. Chú ý rằng AD là trục đẳng phương của (O) và (AOM)

Xét $P_{F/(O)}$ và $P_{F/(AOM)}$ để suy ra : $\overline{FB}.\overline{FC} = \overline{FE}.\overline{FM}$

b. $\overline{FB}.\overline{FC} = \overline{FE}.\overline{FM}$

$\Leftrightarrow (\overline{EB} - \overline{EF})(\overline{EC} - \overline{EF}) = -\overline{EF}(\overline{EM} - \overline{EF})$

$\Leftrightarrow \overline{EB}.\overline{EC} - \overline{EB}.\overline{EF} - \overline{EF}\,\overline{EC} + \overline{EF}^2 = -\overline{EF}.\overline{EM} + \overline{EF}^2$

$\Leftrightarrow \overline{EB}.\overline{EC} - \overline{EF}(\overline{EB} + \overline{EC}) = -\overline{EF}\,\overline{EM}$

$\Leftrightarrow \overline{EB}.\overline{EC} - \overline{EF}(\overline{EM} + \overrightarrow{MB} + \overline{EM} + \overrightarrow{MC}) = -\overline{EF}.\overline{EM}$

$\Leftrightarrow \overline{EB}.\overline{EC} - 2\overline{EF}.\overline{EM} = -\overline{EF}.\overline{EM}$ (do $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$)

$\Leftrightarrow \overline{EB}.\overline{EC} = \overline{EF}.\overline{EM}$.

c. Tứ giác AOME nội tiếp đường tròn

Mặt khác: $\widehat{OME} = 90^0 \Rightarrow \widehat{OAE} = 90^0$

$\Rightarrow$ EA là tiếp tuyến của đường tròn (O) $\Rightarrow EA^2 = \overline{EB}.\overline{EC}$

Kết hợp với câu b ta có: $EA^2 = \overline{EF}.\overline{EM}$.

$\Rightarrow$ EA tiếp xúc với đường tròn (O) và tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác AMF.

BT18: a. Nêu vị trí tương đối của 3 điểm A, B, C nếu 3 điểm này có cùn phương tích đối với 2 đường tròn.

b. Nêu vị trí tương đối của 3 điểm A, B, C nếu chúng là tâm của đường tròn đôi một nhận một đường thẳng duy nhất làm trục đẳn phương.

Giải:

a. Vì A, B, C có cùng phương tích đối với 2 đường tròn nên chún thuộc trục đẳng phương của 2 đường tròn này, vì vậy chúng thẳng hàng

b. Gọi Δ là trục đẳng phương của từng đôi trong 3 đường tròn (A), (B (C) (tâm A, tâm B, tâm C).

Vì Δ là trục đẳng phương của (A) và (B) $\Rightarrow AB \perp \Delta$ (1)

Tương tự Δ là trục đẳng phương của (C) và (B) $\Rightarrow BC \perp \Delta$ (2)

(1)và (2) $\Rightarrow$ A, B, C thẳng hàng.

Từ **BT18** ta có phương pháp chứng minh 3 điểm thẳng hàng như sau

Để chứng minh 3 điểm thẳng hàng ta chứng minh chúng có cùn phương tích đối với 2 đường tròn hoặc chúng là tâm của các đường trò đôi một nhận một đường thẳng duy nhất làm trục đẳng phương.

BL1: Cho tứ giác ABCD có các cạnh AB và CD cắt nhau tại I, AD và B cắt nhau tại K.

Chứng minh rằng: Trực tâm các tam giác AID, BCI, CDK thẳng hàn

HD: Sử dụng kết quả **BL1** của **BT13** ta có trực tâm các tam giác AII BCI, CDK, ABK có cùng phương tích đối với 2 đường tròn (O_1; O_1A), (O O_2B), vì vậy chúng thuộc trục đẳng phương của 2 đường tròn (O_1; O_1A (O_2; O_2B), do đó chúng thẳng hàng.

BT19: Cho 3 đường tròn có tâm không cùng thuộc một đường thẳn Chứng minh rằng ba trục đẳng phương của từng cặp 2 trong 3 đườn tròn trên đồng qui tại một điểm.

Giải:

Gọi d_{12} là trục đẳng phương của 2 đường tròn (O_1) và (O_2), d_{13} là trụ đẳng phương của (O_1) và đường tròn (O_3), d_{23} là trục đẳng phương củ (O_2) và (O_3)

Vì $d_{12} \perp O_1O_2$ và $d_{13} \perp O_1O_3$, mà O_1O_2 và O_1O_3 cắt nhau

$\Rightarrow d_{12}$ và d_{13} cắt nhau tại I

$$I \in d_{12} \Rightarrow P_{I/(O_1)} = P_{I/(O_2)} \quad (1)$$

$$I \in d_{13} \Rightarrow P_{I/(O_1)} = P_{I/(O_3)} \quad (2)$$

$$(1) \text{ và } (2) \Rightarrow P_{I/(O_2)} = P_{I/(O_3)} \Rightarrow I \in d_{23}$$

Vậy d_{12}, d_{13}, d_{23} đồng qui tại I.

Từ **BT19** ta có phương pháp chứng minh 3 đường thẳng đồng qui như sau:

Để chứng minh 3 đường thẳng đồng qui ta chứng minh 3 dường thẳng đó là 3 trục đẳng phương của từng cặp 2 trong 3 đường tròn có tâm không thẳng hàng.

BL: Cho đường tròn tâm O và 2 đường kính AB và CD là 2 đường kính. Tiếp tuyến với (O) tại B cắt AC tại P, PD cắt (O) tại điểm thứ hai G.

Chứng minh rằng AG, BC, PO đồng quy.

HD: Sử dụng kết quả của **BL2** của **BT13** ta có OP là trục đẳng phương của (ϖ'), (ϖ)

Hai đường tròn (O), (ϖ') cắt nhau tại A, G $\Rightarrow$ AG là trục đẳng phương của (O), (ϖ')

Tương tự BC là trục đẳng phương của (O), (ϖ)

$\Rightarrow$ AG, BC, PO đồng quy.

BT20: Cho 2 đường tròn (O; R) và $(O_1; R_1)$ có trục đẳng phương là Λ. Khi đó với mọi điểm M ta có : $P^{M}/_{(O)} - P^{M}/_{(O_1)} = 2\overline{OO_1}.\overline{HK}$. Với H là giao điểm của Λ và OO_1, K là hình chiếu của M lên OO_1

HD: Để giải bài toán này bạn đọc xem lại kết quả sau:

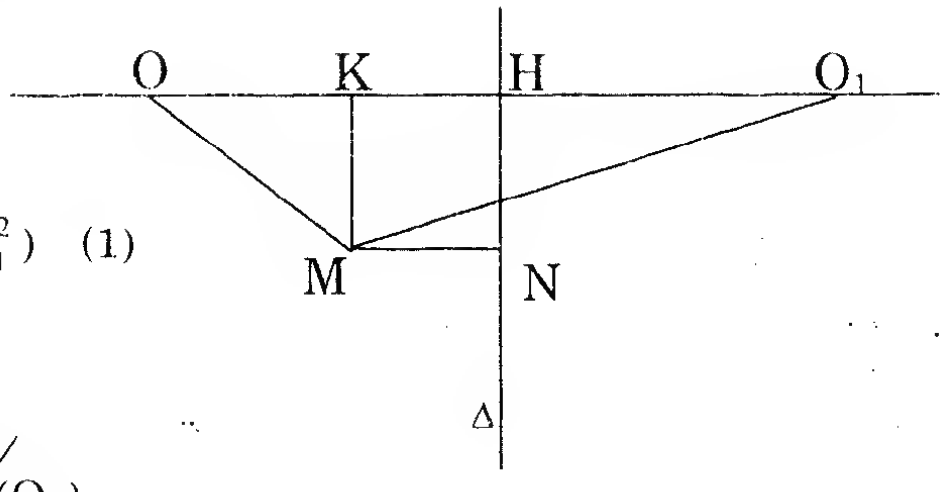
Cho 2 điểm phân biệt A, B và điểm M tùy ý. H là hình chiếu của M lên AB, O là trung điểm của AB, Ta có: $MA^2 - MB^2 = 2\overline{OH}.\overline{AB}$ (*) (SGK tr.29).

Giải:

Gọi I là trung điểm của OO_1. Ta có:

$P^{M}/_{(O)} = OM^2 - R^2$; $P^{M}/_{(O_1)} = O_1M^2 - R_1^2$

$\Rightarrow P^{M}/_{(O)} - P^{M}/_{(O_1)} = (OM^2 - O_1M^2) - (R^2 - R_1^2)$ (1)



Theo (*) ta có:

$OM^2 - O_1M^2 = 2\overline{OO_1}.\overline{IK}$

Mặt khác: $P^{H}/_{(O)} = P^{H}/_{(O_1)}$

$\Leftrightarrow OH^2 - R^2 = O_1H^2 - R_1^2$

$\Leftrightarrow R^2 - R_1^2 = OH^2 - O_1H^2 = 2\overline{OO_1}.\overline{IH}$

Thế vào (1) ta có: $P^{M}/_{(O)} - P^{M}/_{(O_1)}$

$= 2\overline{OO_1}.\overline{IK} - 2\overline{OO_1}.\overline{IH} = 2\overline{OO_1}(\overline{IK} - \overline{IH}) = 2\overline{OO_1}.\overline{HK}$

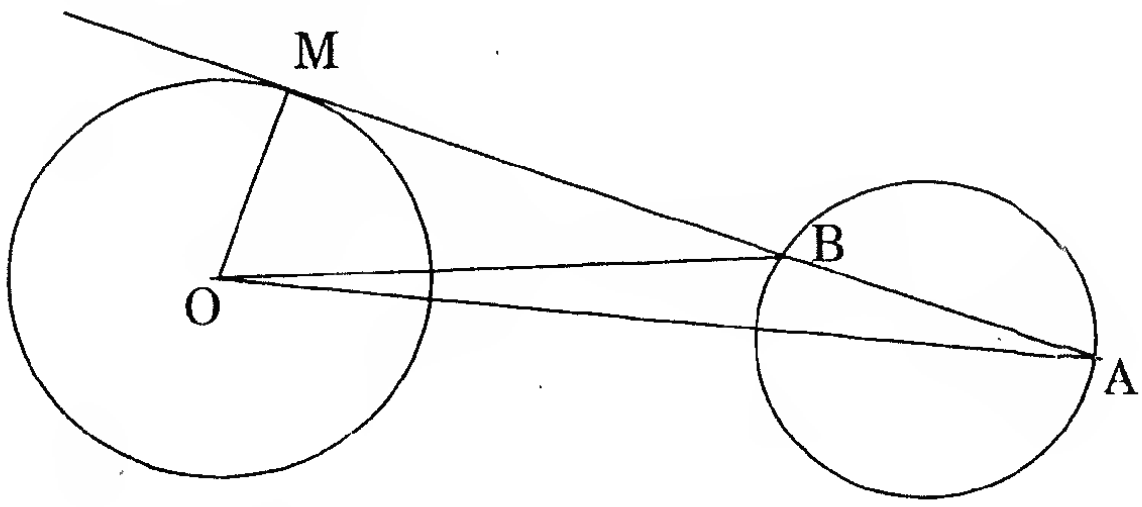
Từ kết quả bài toán ta suy ra hệ quả sau:

Cho 2 đường tròn (O; R) và $(O_1; R_1)$ có trục đẳng phương là Δ. Kl đó với diểm M tùy ý ta có: $P^{M}/_{(O)} - P^{M}/_{(O_1)} = 2\overline{OO_1}.\overline{NM}$ trong dó là hình chiếu của M lên Δ. Tính chất này thường được sử dụng trong bà toán chứng minh đoạn thẳng có độ dài không đổi, tính toán độ dài doạ thẳng ...

BL: Cho 2 đường tròn cố định (O) và (O_1). Tiếp tuyến của (O) tại điểm I bất kì thuộc (O) cắt (O_1) tại A, B. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tai giác OAB. Chứng minh rằng:

$$O_1I = \frac{\left|P^{O}/_{(O_1)}\right|}{2R}$$

HD:



Gọi R là bán kính của (O)

Đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác OAB cắt (O_1) tại AB, vì vậy BA l trục đẳng phương của (I) và (O_1), lại do MO ⊥ AB. Mặt khác $P^{O}/_{(I)} = 0$ d

$O \in (I) \Rightarrow \left|P^{O}/_{(O_1)} - P^{O}/_{(I)}\right| = 2O_1I.MO = 2O_1I.R$

$$\Rightarrow O_1I = \frac{\left|P^{O}/_{(O_1)}\right|}{2R}.$$

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG II

BT6: Hai lực $\vec{p}$ và $\vec{q}$ tạo với nhau một góc $\alpha = 50^0$, cùng xuất phát từ điểm O. Tính hợp lực $\vec{r}$ và tính góc tạo bởi $\vec{r}$ với $\vec{p}$ và $\vec{r}$ với $\vec{q}$ biết rằng:

$|\vec{p}| = 100N$, $|\vec{q}| = 200N$.

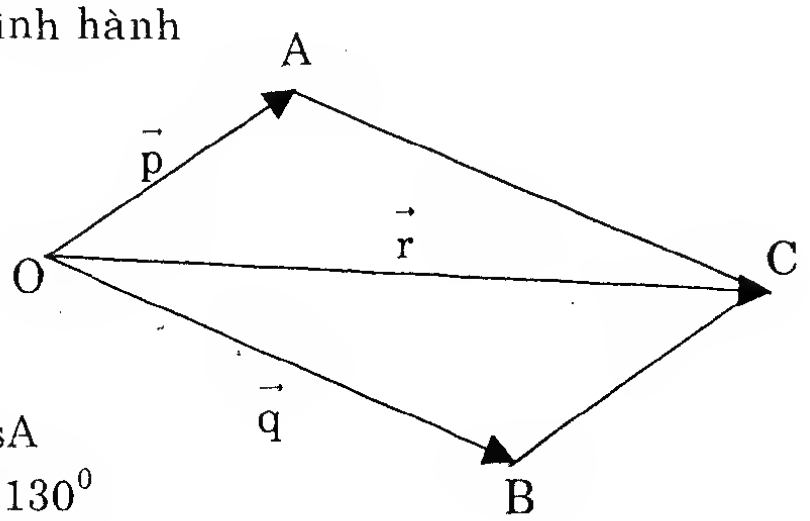
Giải:

Ta dựng $\vec{r}$ bằng qui tắc hình bình hành

$\vec{p} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{q} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OC}$

với OACB là hình bình hành có

$OA = 100$, $OB = 200$, $\widehat{AOB} = 50^0$



Sử dụng định lí côsin cho tam giác OAC, ta có:

$OC^2 = OA^2 + AC^2 - 2.OA.AC.\cos A$

Vì $OA = 100$, $A = 180^0 - 50^0 = 130^0$

$AC = OB = 200$

$\Rightarrow OC^2 = 100^2 + 200^2 - 2.100.200.\cos 130^0 \approx 75711,50494$

$\Rightarrow OC \approx 275,1572$

Vậy $|\vec{r}| \approx 275,1572$.

Sử dụng định lí côsin cho tam giác OAC, ta có:

$$\cos(\vec{r};\vec{p}) = \frac{OA^2 + OC^2 - AC^2}{2OA.OC} \approx 0,830643445$$

$\Rightarrow (\vec{r};\vec{p}) \approx 33^0 50' 6''$ $\Rightarrow (\vec{r};\vec{q}) \approx 50^0 - 33^0 50' 6'' \approx 16^0 9' 54''$.

BT7: Cho tam giác ABC có $a = \sqrt{6}$ cm, $b = 2$cm, $c = (\sqrt{3} + 1)$cm. Tính đường cao h_a và bán kính R đường tròn ngoại tiếp tam giác.

HD: Tam giác ABC đã biết độ dài 3 cạnh, để tính đường cao, bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp ta dùng công thức diện tích tam giác.

Giải:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{abc}{4R}$$

$$\Rightarrow h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a} \approx 1,931851653\text{cm}$$

$$R = \frac{bc}{2h_a} \approx 1,414213562 \text{ cm}$$

BT8: Trong đường tròn O bán kính R lấy điểm P cố định cát tuyến AB thay đổi nhưng luôn đi qua P. Gọi I là trung điểm của dây AB. Chứng minh rằng $IA^2 - IB^2$ không đổi khi AB quay quanh P.

HD: Tính $IA^2 - IB^2$ theo $P^{P}/_{(O)}$ bằng cách biến đổi làm xuất hiện đại lượng $\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB}$.

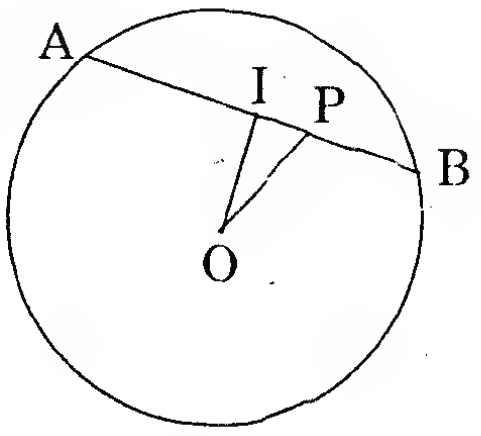
Giải:

$$IA^2 - IP^2 = \overrightarrow{IA}^2 - \overrightarrow{IP}^2 = (\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IP})(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IP})$$
$$= \overrightarrow{PA}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BP})$$

Do I là trung điểm của AB nên $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

$$\Rightarrow IA^2 - IP^2 = \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{BP} = -\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB}$$
$$= -P^{P}/_{(O)} = -OP^2 + R^2$$

$\Rightarrow IA^2 - IP^2$ không đổi.



CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

BT1: Tam giác ABC có $AB = \sqrt{3} - 1$, $AC = 2$, $BC = \sqrt{6}$. Số đo của góc A là:

a. 150^0 b. 120^0 c. 60^0 d. 30^0

Hãy chọn kết quả đúng

HD: Sử dụng định lí côsin: $\cos A = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC}$.

BT2: Tam giác ABC có AB = 5cm, $A = 120^0$, $B = 15^0$. Độ dài cạnh BC là

a. 5cm b. $5\sqrt{6}$ cm c. $5\sqrt{5}$ cm d. $\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$ cm

HD: $C = 180^0 - 120^0 - 15^0 = 45^0$.

Theo định lí sin ta có: $\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AB}{\sin C}$

$$\Rightarrow BC = \frac{AB\sin A}{\sin C} = \frac{5\sin 120^0}{\sin 45^0} = \frac{5.\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{6}}{2}\text{cm}.$$

BT3: Tam giác ABC có các cạnh thỏa mãn hệ thức:

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 + CA.CB$$

Số đo của góc C là:

a. 30^0 b. 60^0 c. 120^0 d. 150^0.

HD: Sử dụng định lí côsin: $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.CB.\cos C$

$\Rightarrow -2CA.CB.\cos C = CA.CB \Rightarrow \cos C = -\frac{1}{2} \Rightarrow C = 120^0$.

BT4: Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, có các cạnh là a, b, c. Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai:

a. $b^2 + c^2 > a^2$ b. $a^2 + c^2 > b^2$ c. $a^2 > c^2 - b^2$ đ. $b^2 < a^2 - c^2$.

ĐS: Câu d.

BT5: Trong tam giác ABC có AB = 13cm, BC = 14cm, CA = 15cm. Gọi M là trung điểm của cạnh AB và H là chân đường cao vẽ từ đỉnh A đến cạnh BC. Độ đài đoạn HM là:

a. 6cm b. 6,5cm c. 7cm đ. 7,5cm.

* Kết quả nào là đúng.

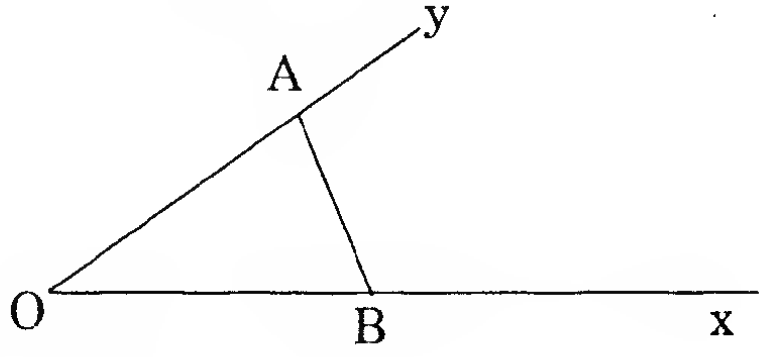
* Trong các giả thiết của bài toán, giả thiết nào có thể thay đổi mà không ảnh hưởng đến độ đài đoạn HM.

HD: HM là trung tuyến của tam giác AHB vuông tại H, vì vậy $HM = \frac{1}{2}AB = 6,5$ cm. Như vậy giả thiết CA = 15 cm, BC = 14cm là thừa.

BT6: Cho góc $xOy = 30^0$. A, B là các điểm đi động trên Ox và Oy sao cho AB = 1. Độ dài lớn nhất của đoạn OB là:

a. 1 b. $\sqrt{3}$ c. 2 đ. $2\sqrt{2}$.

Hãy chọn kết quả đúng.



HD:

Nếu $A \equiv O \Rightarrow OB = 1$

Nếu $B \equiv O \Rightarrow OB = 0$

Trường hợp OAB là tam giác, theo định lí sin ta có:

$$\frac{AB}{\sin O} = \frac{OB}{\sin A} \Rightarrow OB = \frac{AB.\sin A}{\sin O} = \frac{\sin A}{\frac{1}{2}} = 2\sin A \le 2$$

Đẳng thức đạt được $\Leftrightarrow \sin A = 1 \Leftrightarrow A = 90^0$

Vậy câu c đúng.

BT7: Tam giác ABC có AB = 8cm, AC = 18cm và có điện tích bằng $64cm^2$. Khi đó sinA sẽ lấy một trong các giá trị sau:

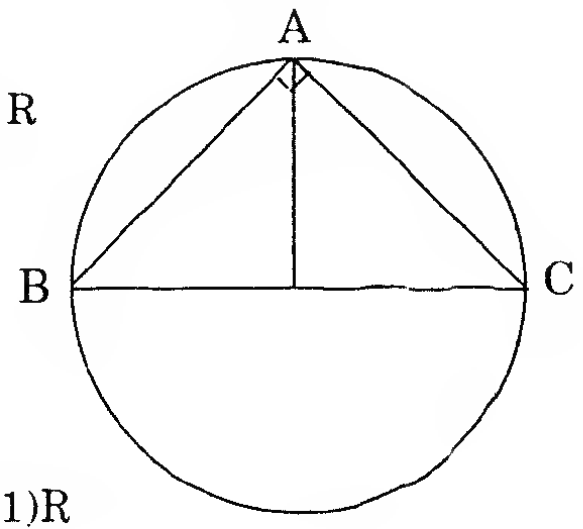
a. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b. $\frac{3}{8}$ c. $\frac{4}{5}$ đ. $\frac{8}{9}$.

HD: Sử dụng công thức $S = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A \Rightarrow \sin A = \frac{2S}{AB.AC}$.

BT8: Cho đường tròn bán kính r nội tiếp trong tam giác vuông cân ABC và đường tròn bán kính R ngoại tiếp tam giác ấy. Khi đó tỉ số $\frac{R}{r}$ bằng

a. $1+\sqrt{2}$ b. $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ c. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ d. $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

Hãy chọn kết quả đúng.



HD: Ta tính các cạnh của tam giác ABC theo R

$$AC = AB = \frac{2R}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,R$$

$$S = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,R\sqrt{2}\,R = R^2$$

$$P = \frac{AB+AC+BC}{2} = \frac{2\sqrt{2}R+2R}{2} = (\sqrt{2}+1)R$$

$$S = pr \Leftrightarrow R^2 = (\sqrt{2}+1)Rr \Rightarrow \frac{R}{r} = 1+\sqrt{2}.$$

BT9: Cho tam giác ABC có AB = 4cm, AC = 8cm. Gọi M là trung điểm của cạnh BC và AM = 3 cm. Khi đó cạnh BC có độ dài bằng :

a. $2\sqrt{6}$ cm b. $2\sqrt{31}$ cm c. 9cm d. $(4+2\sqrt{13})$cm.

Hãy chọn kết quả đúng.

HD: Sử dụng công thức độ đài trung tuyến

$$m_a^2 = \frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4} \Rightarrow a^2 = 2(b^2+c^2) - 4m_a^2$$

Hay $BC^2 = 2(AC^2 + AB^2) - 4AM^2$.

BT10: Cho đường tròn tâm I bán kính R. Ta có phương tích của điểm I đối với đường tròn (I; R) bằng:

a. 0 b. R^2 c. $-R^2$ d. $-R$.

Kết quả nào đúng.

ĐS: c

BT11: Hai đây cung AB, CD của đường tròn (O; R) cắt nhau tại M. Phát biểu nào sau đây đúng:

a. $MA.MB = OM^2 - R^2$; b. $MC.MD = R^2 - OM^2$;

c. $MA.MB = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$; đ. $MC.MD = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$.

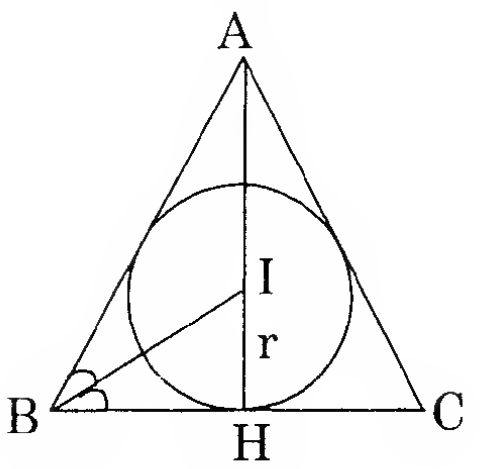
HD: Vì M là giao điểm của 2 đây cung nên M nằm trong đường tròn.

ĐS: b

BT12: Cho tam giác đều ABC có cạnh a và (C) là đường tròn nội tiếp. Phương tích của điểm A đối với (C) bằng:

a. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ b. $\frac{a^2}{2}$ c. $\frac{a^2}{4}$ d. $2a^2$.

Kết quả nào đúng.



HD: $r = \frac{a}{2}tg30^0 = \frac{a}{2\sqrt{3}}$; $AH = a\frac{\sqrt{3}}{2}$

$P^{A}/_{(C)} = AM.AH = (AH - 2r)AH$

$= (a\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\frac{a}{2\sqrt{3}})a\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2}{4}$.

BT13: Cho 2 điểm A, B cố định và một đường thẳng (d) cố định cắt đoạn AB tại M, biết MA = a, MB =b. Đường tròn thay đổi đi qua A, B và cắt (d) tại C, D. Độ dài ngắn nhất của đoạn CD bằng:

a. a + b b. $\sqrt{ab}$ c. $2\sqrt{ab}$ d. $\frac{\sqrt{ab}}{2}$.

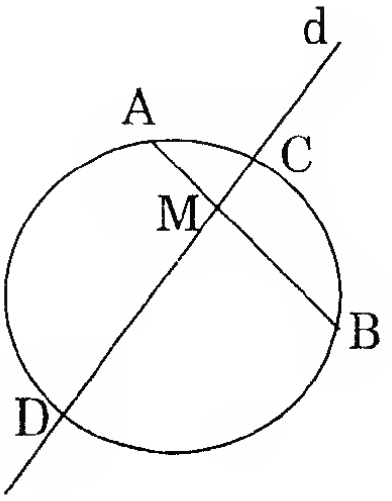
HD: Sử dụng bất đẳng thức Côsi

Vì A. B. C. D cùng thuộc một đường tròn tròn, ta có: MC.MD = MA.MB = ab

$CD = MC + MD \geq 2\sqrt{MC.MD} = 2\sqrt{ab}$

Đẳng thức khi và chỉ khi $MC = MD = \sqrt{ab}$

Vậy câu c đúng.



CHƯƠNG III: PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Tọa độ của điểm và của vectơ

1. Hệ tọa độ Oxy gồm 2 trục Ox và Oy vuông góc nhau với 2 vectơ đơn vị lần lượt là: $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ $(|\vec{e_1}| = |\vec{e_2}| = 1)$.

2. Tọa độ của điểm, của vectơ : $M(x; y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x.\vec{e_1} + y.\vec{e_2}$

$\vec{a} = (a_1; a_2) \Leftrightarrow \vec{a} = a_1.\vec{e_1} + a_2.\vec{e_2}$.

II. Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

Cho $\vec{a} = (a_1; a_2)$; $\vec{b} = (b_1; b_2)$

$A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$

Ta có: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$

$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$; $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$

$k.\vec{a} = (k.a_1; k.a_2)$; $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$

$\vec{a}.\vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2$

$\vec{a} = k.\vec{b} \Leftrightarrow a_1.b_2 - a_2.b_1 = 0$ (Hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow a_1.b_2 - a_2.b_1 = 0$)

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1.b_1 + a_2.b_2 = 0$; $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$; $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \dfrac{a_1.b_1 + a_2.b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$.

III. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng và tọa độ trọng tâm của tam giác

1. Cho 2 điểm phân biệt $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$. Gọi $M(x_M; y_M)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB ta có: $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$

Chú ý rằng điều ngược lại cũng đúng, nghĩa là nếu $M(x_M; y_M)$ có tọa độ thỏa mãn: $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$ thì M là trung điểm của .

2. Cho tam giác ABC, biết $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$; $C(x_C; y_C)$. $G(x_G; y_G)$ là trọng tâm của tam giác ABC khi và chỉ khi: $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$.

BÀI TẬP TRONG SÁCH GIÁO KHOA

BT1: Cho $\vec{a} = (2; 4)$, $\vec{b} = (-3; 1)$; $\vec{c} = (5; -2)$. Tìm tọa độ các vectơ:

a. $\vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$. b. $\vec{n} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$.

Giải:

a. $\vec{a} = (2; 4) \Rightarrow 2\vec{a} = (4; 8)$; $\vec{b} = (-3; 1) \Rightarrow 3\vec{b} = (-9; 3)$

$\Rightarrow \vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b} = (4 - 9; 8 + 3) = (-5; 11)$

Tổng quát ta có công thức sau: Cho $\vec{a} = (a_1; a_2)$; $\vec{b} = (b_1; b_2)$; $\vec{c} = (c_1; c_2)$

$k.\vec{a} + l.\vec{b} + m.\vec{c} = (k.a_1 + l.b_1 + m.c_1; k.a_2 + l.b_2 + m.c_2)$.

b. Sử dụng công thức vừa nêu ở câu a ta có:

$\vec{n} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = (3.2 - 2.(-3) + 5; 3.4 - 2.1 - 2) = (17; 8)$.

BT2: Cho 3 điểm $A(2; 1)$, $B(2; -1)$, $C(-2; -3)$

a. Tìm tọa độ điểm D để ABCD là hình bình hành.

b. Tìm tọa độ tâm M của hình bình hành ABCD.

Giải:

a. Trước tiên ta chứng minh A, B, C không thẳng hàng

$$\overrightarrow{BA} = (0; 2); \overrightarrow{BC} = (-4; -2)$$

Vì $0.(-2) - 2(-4) \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương vì vậy A, B, C không thẳng hàng.

Gọi $D(x_D; y_D)$, ta có: $\overrightarrow{CD} = (x_D + 2; y_D + 3)$

ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 2 = 0 \\ y_D + 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -2 \\ y_D = -1 \end{cases}$

Vậy $D(-2; -1)$.

b. Gọi $M(x_M; y_M)$

M là tâm của hình bình hành ABCD $\Leftrightarrow$ M là trung điểm của AC

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} = 0 \\ y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} = -1 \end{cases}$ Vậy $M(0; -1)$.

BT3: Cho các điểm A(2; 3), B(9; 4), M (5; y) và P(x; 2)

a. Tìm y để tam giác AMB vuông tại M.

b. Tìm x để A, P, B thẳng hàng.

Giải:

a. Ta tìm điều kiện để $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM}$. Ta có:

$$\overrightarrow{AM} = (3; y-3),\ \overrightarrow{BM} = (-4; y-4)$$

ΔAMB vuông tại M $\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow 3.(-4) + (y-3)(y-4) = 0$

$\Leftrightarrow -12 + y^2 - 7y + 12 = 0 \Leftrightarrow y^2 - 7y = 0 \Leftrightarrow y(y-7) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 7 \end{cases}$ Vậy y = 0 hoặc y = 7.

b. Ta tìm điều kiện để $\overrightarrow{AP}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương. Ta có:

$$\overrightarrow{AP} = (x-2; -1),\ \overrightarrow{AB} = (7; 1)$$

A, P, B thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AP}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\Leftrightarrow 1(x-2) - 7(-1) = 0$

$\Leftrightarrow x = -5.$

Chú ý: Để chứng minh ABC thẳng hàng ta chứng minh $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ cùng phương

BL1: Tìm x để A(1; 2), B(4; – 2), C(x; 6) là 3 đỉnh của tam giác nào đó

HD: Tìm điều kiện để $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ không cùng phương.

BT4: Cho tam giác ABC có A(– 5; 6), B(– 4; – 1), C(4; 3). Tính tọa độ trực tâm H và hình chiếu A' của A lên BC.

HD: Để tìm M(x; y) thường ta lập hệ gồm 2 phương trình 2 ẩn x, y dựa vào 2 dữ kiện nào đó.

Giải:

a. Gọi H(x; y), ta có:

$\overrightarrow{AH} = (x+5; y-6),\ \overrightarrow{BC} = (8; 4)$

$\overrightarrow{BH} = (x+4; y+1),\ \overrightarrow{AC} = (9; -3)$

H là trực tâm của tam giác ABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 8(x+5) + 4(y-6) = 0 \\ 9(x+4) - 3(y+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = -4 \\ 3x - y = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$

Vậy H(– 3; 2).

Chú ý: Để tìm tọa độ trực tâm H của tam giác ABC ta giải hệ

$$\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \text{ và } \overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$$

b. Gọi $A'(x'; y')$

$\overrightarrow{AA'} = (x' + 5; y' - 6)$

$\overrightarrow{BA'} = (x' + 4; y' + 1)$

$\overrightarrow{BC} = (8; 4)$

A' là hình chiếu vuông góc của A lên BC $\Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BA'}$ cùng phương với $\overrightarrow{BC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8(x' + 5) + 4(y' - 6) = 0 \\ 4(x' + 4) - 8(y' + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x' + y' = -4 \\ x' - 2y' = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = -2 \\ y' = 0 \end{cases} \Rightarrow A'(-2; 0).$$

Chú ý: Để tìm tọa độ hình chiếu vuông góc A' của đỉnh A của tam giác ABC lên BC ta giải hệ $\overrightarrow{AA'} \perp \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BA'}$ cùng phương với $\overrightarrow{BC}$.

BT5: Cho $\vec{a} = (4; 3)$; $\vec{b} = (1; 7)$

a. Tính độ dài của $\vec{a}$ và $\vec{b}$. b. Tính góc giữa 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Giải:

a. $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

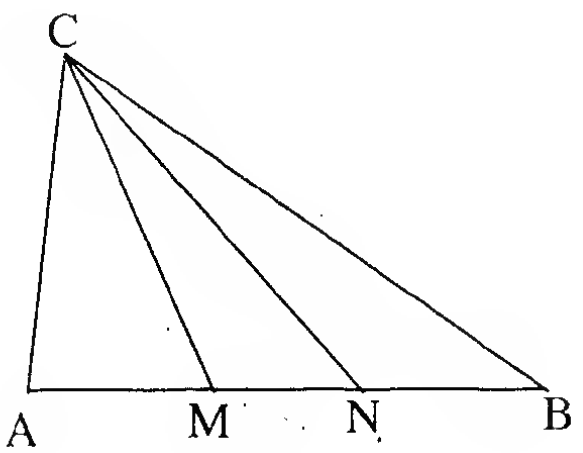
$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50}$.

b. $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{4.1 + 3.7}{5\sqrt{50}} = \dfrac{25}{5\sqrt{50}} = \dfrac{5}{\sqrt{50}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 45^0$.

BT 6: Cho điểm A(1; – 3) và B(4; 3). Tìm tọa độ những điểm M, N chia đoạn thẳng AB thành 3 đoạn bằng nhau.

Giải:



Gọi $M(x_0; y_0)$. Ta có

$\overrightarrow{MA} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{MB}$ (*)

$\overrightarrow{MA} = (1 - x_0; -3 - y_0)$

$\overrightarrow{MB} = (4 - x_0; 3 - y_0) \Rightarrow -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{MB}$

$= \left(\dfrac{x_0 - 4}{2}; \dfrac{y_0 - 3}{2}\right)$

$$(*)\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_0 = \dfrac{x_0 - 4}{2} \\ -3 - y_0 = \dfrac{y_0 - 3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 2x_0 = x_0 - 4 \\ -6 - 2y_0 = y_0 - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -1 \end{cases}$$

Vậy M(2; – 1)

Gọi N(x_1; y_1), Ta có: $\overrightarrow{NA} = -2\overrightarrow{NB}$ (**)

$\overrightarrow{NA}$ $(1 - x_1;\ -3 - y_1)$

$\overrightarrow{NB}$ $(4 - x_1;\ 3 - y_1) \Rightarrow -2\overrightarrow{NB} = (2x_1 - 8;\ 2y_1 - 6)$

$$(**) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_1 = 2x_1 - 8 \\ -3 - y_1 = 2y_1 - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

Vậy N(3; 1).

BL1: Cho 2 điểm A(x_A; y_A) ,B(x_B; y_B). Tìm tọa độ điểm M thỏa mãn

$$\overrightarrow{MA} = k.\overrightarrow{MB} \quad (k \neq 1)$$

Gọi M(x_M; y_M), giải tương tự như câu trên ta có $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1 - k} \\ y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1 - k} \end{cases}$

BL2: Cho M(1; 4); G(3; 0), N(– 1; 1). Tìm tọa độ 3 đỉnh của tam giác nhận M, N, G lần lượt là trung điểm 2 cạnh và trọng tâm của tam giác.

HD: Sử dụng tính chất của trọng tâm và BL1.

Gọi ABC là tam giác có M là trung điểm của BC, N là trung điểm CA, G là trọng tâm.

Ta có: $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MG}$, từ đó suy ra tọa độ điểm A.

BL3: Cho tam giác ABC với A(1; – 2), B(2; – 3), C(3; 0)

a. Tìm tọa độ chân đường phân giác trong D và chân đường phân giác ngoài E của góc A của tam giác ABC.

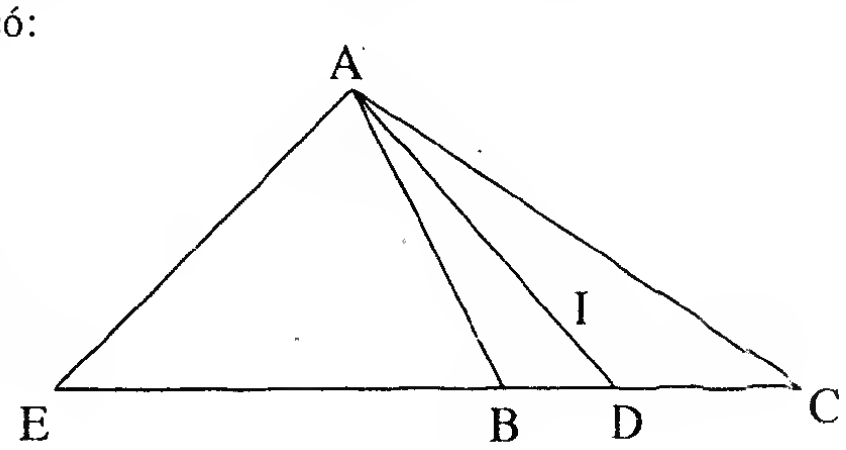
b. Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC.

HD: a. Theo kết quả ở lớp 9 ta có:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

Tính $AB = \sqrt{2}$; $AC = 2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow DC = 2DB$$



Mặt khác D nằm trong đoạn BC $\Rightarrow \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DB}$

Sử dụng **BL1** ta tính được tọa độ điểm D

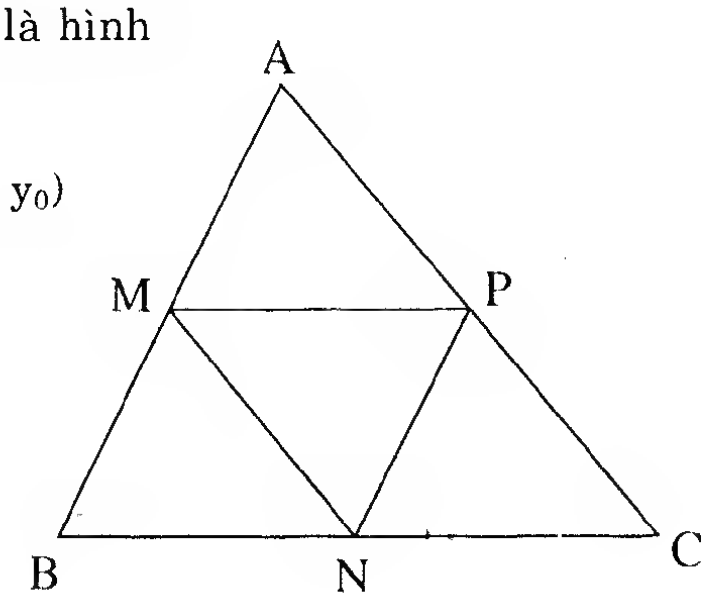
Tương tự $\overrightarrow{EC} = 2\overrightarrow{EB}$ từ đó tính được tọa độ điểm E.

b. Giải tương tự câu a với chú ý rằng BI là đường phân giác trong của tam giác ABD.

BT7: Cho M(1; 4); N(3; 0), P(−1; 1). Tìm tọa độ 3 đỉnh của tam giác nhận M, N, P làm trung điểm của 3 cạnh.

Giải:

MN là đường trung bình của tam giác ABC nên MN // AP và MN = AP $\Rightarrow$ MNPA là hình bình hành $\Rightarrow \overrightarrow{NA} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP}$



Gọi $A(x_0; y_0)$. Ta có: $\overrightarrow{NA} = (x_0 - 3; y_0)$

$\overrightarrow{NM} = (-2; 4)$; $\overrightarrow{NP} = (-4; 1)$

$$\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{NP} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 3 = -6 \\ y_0 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -3 \\ y_0 = 5 \end{cases}$$ Vậy A(−3; 5)

Gọi $B(x_1; y_1)$; $C(x_2; y_2)$

Do M là trung điểm AB ta có: $\begin{cases} 1 = \dfrac{-3 + x_1}{2} \\ 4 = \dfrac{5 + y_1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 3 \end{cases}$ Vậy B(5; 3)

Do P là trung điểm của AC ta có: $\begin{cases} -1 = \dfrac{-3 + x_2}{2} \\ 1 = \dfrac{5 + y_2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = -3 \end{cases}$

Vậy C(1; −3).

Vậy 3 đỉnh của tam giác nói ở đề bài có tọa độ là (−3; 5), (5; 3), (1; −3).

Có thể giải cách khác như sau: Gọi $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$; $C(x_2; y_2)$.

Theo giả thiết M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CA ta có:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{x_0 + x_1}{2} \\ 4 = \dfrac{y_0 + y_1}{2} \\ 3 = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ 0 = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \\ -1 = \dfrac{x_0 + x_2}{2} \\ 1 = \dfrac{y_0 + y_2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + x_1 = 2 \\ x_1 + x_2 = 6 \\ x_0 + x_2 = -2 \\ y_0 + y_1 = 8 \\ y_1 + y_2 = 0 \\ y_0 + y_2 = 2 \end{cases}$$

Sử dụng MTBT để giải 2 hệ

$$\begin{cases} x_0 + x_1 = 2 \\ x_1 + x_2 = 6 \\ x_0 + x_2 = -2 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} y_0 + y_1 = 8 \\ y_1 + y_2 = 0 \\ y_0 + y_2 = 2. \end{cases}$$

BL1: Cho M(1; 4); N(3; 0), P(– 1; 1). Tìm tọa độ 3 đỉnh của tam giác ABC nhận M, N làm trung điểm của AB, BC và $\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{PA}$.

HD: Sử dụng cách 2 của bài toán 7 và kết quả **BL1** của **BT6**

BT8: Cho tam giác ABC có A(10; 5), B(3; 2) và C(6; – 5)

a. Chứng minh tam giác ABC vuông.

b. Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm của tam giác AB

Giải:

HD: a.

Cách 1: Tính AB^2 ,BC^2 ,CA^2 và sử dụng định lí Pitagor.

Cách 2: Sử đụng tích vô hướng

Giải:

Cách 1: $AB^2 = 58$, $BC^2 = 58$, $CA^2 = 116$

Vì $AB^2 + BC^2 = CA^2$ nên tam giác ABC vuông cân tại B.

Cách 2: $\overrightarrow{AB} = (-7; -3)$; $\overrightarrow{BC} = (3; -7)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{BC} = -7.3 + 7.3 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$

Vậy tam giác ABC vuông tại B.

b. Vì tam giác ABC vuông tại B nên có tâm đường tròn ngoại tiếp I (a; b) là trung điểm của AC.

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{10 + 6}{2} = 8 \\ b = \dfrac{5 - 5}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow I(8; 0)$$

Gọi G(x; y) là trọng tâm của tam giác ABC ta có:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{19}{3} \\ y = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow G\left(\dfrac{19}{3}; \dfrac{2}{3}\right)$

BL1: Cho tam giác ABC có A(6; 4), B(– 4; – 1), C(2; – 4)

Tam giác ABC có hình dạng đặc biệt gì không

Xác định tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Chú ý: Phương pháp tổng quát : để tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC ta giải hệ $\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2. \end{cases}$

BL2: Cho A(2; 2); B(– 5; 1); C(3; – 5). Tìm tâm I và tính bán kính R của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Giải:

Gọi I(x; y). Ta có:

$IA^2 = (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8$

$IB^2 = (x + 5)^2 + (y - 1)^2 = x^2 + y^2 + 10x - 2y + 26$

$IC^2 = (x - 3)^2 + (y + 5)^2 = x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34$

Ta có:

$$\begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 = x^2 + y^2 + 10x - 2y + 26 \\ x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 = x^2 + y^2 - 6x + 10y + 34 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 14x + 2y = -18 \\ 2x - 14y = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$ Vậy I(– 1; – 2)

$R = IA = 5.$

BL3: Cho A(-3; 6), B(9; 10),C(–5; 4). Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tếp tam giác ABC.

DS: I(2; – 2).

BT9: Cho tam giác ABC có A(2; 1), B(7; 6), C(5; – 6). Tính các cạnh và các góc của tam giác .

Giải:

$AB = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$; $BC = \sqrt{148} = 2\sqrt{37}$; $AC = \sqrt{58}$

$\overrightarrow{AB} = (5; 5)$; $\overrightarrow{AC} = (3; -7)$;

$$\cos A = \frac{5.3 - 7.5}{5\sqrt{2}\sqrt{58}} = -\frac{20}{10\sqrt{29}} = -\frac{2}{\sqrt{29}} \Rightarrow A \approx 111^0 48' 5''$$

$\overrightarrow{BA} = (-5;-5)$, $\overrightarrow{BC} = (-2;-12)$

$\cos B = \dfrac{10+60}{5\sqrt{2}2\sqrt{37}} = \dfrac{70}{10\sqrt{74}} = \dfrac{7}{\sqrt{74}} \Rightarrow B \approx 35^0 32'16''$

$\overrightarrow{CA} = (-3;7)$; $\overrightarrow{CB} = (2;12)$

$\cos C = \dfrac{-6+84}{\sqrt{58}2\sqrt{37}} = \dfrac{78}{2\sqrt{2146}} = \dfrac{39}{\sqrt{2146}} \Rightarrow C \approx 32^0 39'39''$.

BL1: Cho 4 điểm A(3; 4), B(4; 1), C(2; – 3), D(– 1; 6). Chứng minh rằng ABCD là tứ giác nội tiếp được (SBT).

HD: Sử dụng tính chất tứ giác ABCD nội tiếp được ⇔ hai góc đối bù nhau

Hai góc là bù nhau ⇔ côsin của chúng đối nhau.

Giải:

$AB = \sqrt{10}$, $BC = \sqrt{20}$, $CD = \sqrt{90}$, $DA = \sqrt{20}$

$\overrightarrow{AB} = (1;-3)$, $\overrightarrow{AD} = (-4;2)$

$\Rightarrow \cos A = \dfrac{-4-6}{\sqrt{10}\sqrt{20}} = -\dfrac{10}{10\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\overrightarrow{CB} = (2;4)$, $\overrightarrow{CD} = (-3;9) \Rightarrow \cos C = \dfrac{-6+36}{\sqrt{20}\sqrt{90}} = \dfrac{30}{30\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Vì cosA và cosC đối nhau nên A, C bù nhau, vậy tứ giác ABCD nội tiếp được.

BT10: Tìm góc giữa hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ trong các trường hợp sau:

a. $\vec{a} = (2;5)$, $\vec{b} = (3;-7)$; b. $\vec{a} = (6;-8)$, $\vec{b} = (12;9)$;

c. $\vec{a} = (2;-6)$, $\vec{b} = (-3;9)$.

HD: Sử dụng công thức $\cos(\vec{a};\vec{b}) = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$.

ĐS: a. 135^0 b. 90^0 c. 180^0.

BÀI TẬP BỔ SUNG

BT11: Cho A(1; 1); B(3; – 5). Tìm tọa độ giao điểm M của AB và

a. Trục hoành b. Trục tung.

HD: a. Gọi M (x; 0) thuộc trục hoành. Ta có:

$\overrightarrow{AM} = (x-1;-1)$; $\overrightarrow{AB} = (2;-6)$

Vì M là giao điểm của AB và trục hoành nên $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ cùng phương.

Ta có: $-6(x-1) + 1.2 = 0 \Leftrightarrow -6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{3} \Rightarrow M(\dfrac{4}{3}; 0)$.

BT12: Cho A(1; 1); B(3; 5). Tìm tọa độ điểm M thuộc trục hoành sao cho AM + BM bé nhất

HD: Sử dụng kết quả quen thuộc trong hình học

Gọi A_0 đối xứng với A qua trục hoành $\Rightarrow A_0(1;-1)$

Vì A, B có tung độ cùng dấu nên chúng cùng phía so với trục hoành vậy điểm M cần tìm là giao của A_0B và trục hoành, ta tìm tọa độ của M như BT1.

Chú ý rằng trong trường hợp A, B khác phía với trục hoành thì điểm M cần tìm là giao điểm của AB và trục hoành.

BT13: Cho A(2; 4), B(1; 1). Tính tọa độ của C, D biết ABCD là hình vuông (SBT).

Giải:

Gọi C(x; y). $\overrightarrow{BA} = (1;3)$; $\overrightarrow{BC} = (x-1;y-1)$

$BA^2 = 10$; $BC^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2$

ABCD là hình vuông $\Rightarrow \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$ và $BA^2 = BC^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1(x-1)+3(y-1)=0 \\ (x-1)^2+(y-1)^2=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4-3y \\ 10y^2-20y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=0 \end{cases} \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$$

TH1: C(4; 0). Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2=4-x_D \\ 1-4=0-y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=5 \\ y_D=3 \end{cases}$$ Vậy D(5; 3)

TH2: C(- 2; 2). Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D=-1 \\ y_D=5 \end{cases}$$ Vậy D(– 1; 5)

BT14: Cho A(4; 2), B(0; 1), C(6; -1). Chứng minh rằng tam giác ABC có một góc tù.

Giải:

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-4;-1)$, $\overrightarrow{AC} = (2;-3)$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC} = \frac{-8+3}{AB.AC} = \frac{-5}{AB.AC} < 0$$

Vậy tam giác ABC có góc A tù.

Chú ý: Cho ΔABC

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} > 0 \Leftrightarrow$ Góc A nhọn ; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow$ Góc A vuông ;

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} < 0 \Leftrightarrow$ Góc A tù

BT15: Tìm x để 2 vectơ $\vec{a} = (x-1; 2)$, $\vec{b}(-x+2; -3)$

a. Cùng phương b. Ngược hướng.

Giải:

a. $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow -3(x-1)-2(-x+2)=0 \Leftrightarrow x=-1$

b. $\vec{a}$, $\vec{b}$ ngược hướng $\Rightarrow$ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow x=-1$

Với $x=-1$, ta có: $\vec{a}\,\vec{b} = -2.3 - 6 < 0 \Rightarrow \vec{a}$, $\vec{b}$ ngược hướng

Vậy $x=-1$

Có thể giải cách khác như sau: $\vec{a}$, $\vec{b}$ ngược hướng $\Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(-x+2)-6}{\sqrt{(x-1)^2+4}\sqrt{(-x+2)^2+9}} = -1.$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 8 = \sqrt{x^2-2x+5}\sqrt{x^2-4x+13}$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 6x^3 + 25x^2 - 48x + 64 = x^4 - 6x^3 + 26x^2 - 46x + 65$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

BT16: Hãy so sánh giá trị của $|\vec{a}.\vec{b}|$ và $|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

Giải:

Ta có:

Nếu trong 2 vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ có một vetơ $\vec{0}$ thì $|\vec{a}.\vec{b}| = |\vec{a}|.|\vec{b}| = 0$

Nếu $\vec{a}, \vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$, ta có:

$|\vec{a}.\vec{b}| = ||\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b})| = |\vec{a}|.|\vec{b}||\cos(\vec{a}, \vec{b})|$

Do $|\cos(\vec{a}, \vec{b})| \le 1 \Rightarrow |\vec{a}|.|\vec{b}||.\cos(\vec{a}, \vec{b})| \le |\vec{a}|.|\vec{b}|$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow |\cos(\vec{a}, \vec{b})| = 1 \Leftrightarrow \vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương

Vậy $|\vec{a}.\vec{b}| \le |\vec{a}|.|\vec{b}|$.

BL: Cho $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$ Chứng minh rằng:

$$(a_1a_2 + b_1b_2)^2 \le (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

Giải:

Theo kết quả ***BT6****:*

$$|\vec{a}\,\vec{b}| \le |\vec{a}|.|\vec{b}| \Leftrightarrow |a_1b_1 + a_2b_2| \le \sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}$$

$$\Leftrightarrow (a_1b_1 + a_2b_2)^2 \le (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

Bất đẳng thức trên được gọi là bất đẳng thức Bunhiacôpxki (Xem SGK đại số).

BT17: Cho $\vec{a} = (x+1; 1)$; $\vec{b} = (2-x; 2)$. Hãy chứng minh:

$$\sqrt{x^2+2x+2} + \sqrt{x^2-4x+8} \ge \sqrt{18}.$$

Giải:

Ta có: $\vec{a} + \vec{b} = (3; 3); |\vec{a}| = \sqrt{(x+1)^2+1} = \sqrt{x^2+2x+2}$,

$|\vec{b}| = \sqrt{(2-x)^2+4} = \sqrt{x^2-4x+8}, |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{18}$

Ta có bất đẳng thức (Xem lại chương I): $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|$

Đẳng thức khi và chỉ khi $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng

$|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+2} + \sqrt{x^2-4x+8} \geq \sqrt{18}$

Đẳng thức khi và chỉ khi $\vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương

$\Leftrightarrow 2(x+1) - 1(2-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Với $x = 0 \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} > 0$ vậy $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng

Vậy đẳng thức xảy ra khi $x = 0$.

Chú ý: Từ **BT17** để tìm GTNN của biểu thức:

$$H = \sqrt{x^2+2x+2} + \sqrt{x^2-4x+8}$$

ta có thể sử dụng phương pháp "hình học hóa" qua các bước sau:

* Biến đổi $H = \sqrt{x^2+2x+2} + \sqrt{x^2-4x+8} = \sqrt{(x+1)^2+1} + \sqrt{(2-x)^2+4}$

* Trong mặt phẳng Oxy lấy $\vec{a} = (x+1; 1)$; $\vec{b} = (2-x; 2)$

$\Rightarrow H = |\vec{a}| + |\vec{b}|$

* Bài toán qui về tìm x sao cho $H = |\vec{a}| + |\vec{b}|$ nhỏ nhất.

Giải tương tự như **BT3.**

BT18: Sử dụng kết quả $||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq |\vec{a} - \vec{b}|$, để giải bài toán sau:

Cho $\vec{a} = (x-1; 1)$, $\vec{b} = (x+2; 2)$. Chứng minh:

$$|\sqrt{x^2-2x+2} - \sqrt{x^2+4x+8}| \leq \sqrt{10}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào

Giải:

$|\vec{a}| = \sqrt{(x-1)^2+1^2} = \sqrt{x^2-2x+2}$

$|\vec{b}| = \sqrt{(x+2)^2+2^2} = \sqrt{x^2+4x+8}$

$\vec{a} - \vec{b} = (-3; -1) \Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{10}$

Theo kết quả nêu ra ở đề bài ta có:

$||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq |\vec{a} - \vec{b}| \Leftrightarrow |\sqrt{x^2-2x+2} - \sqrt{x^2+4x+8}| \leq \sqrt{10}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng (xem bài tập chương vectơ)

$\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng phương $\Rightarrow 2(x-1) - 1(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 4$

Với x = 4, ta có: $\vec{a} . \vec{b} > 0 \Rightarrow \vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng.

Vậy đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ x = 4.

BL:

a. Tìm GTNN của biểu thức: $P = \sqrt{x^2 - 4x + 5} + \sqrt{x^2 - 8x + 20}$.

b. Tìm GTLN của biểu thức: $H = |\sqrt{x^2 - 4x + 5} - \sqrt{x^2 - 8x + 20}|$.

HD:

a. Trong mặt phẳng Oxy lấy $\vec{a} = (x - 2; 1)$, $\vec{b} = (4 - x; 2)$.

b. Trong mặt phẳng Oxy lấy $\vec{a} = (x - 2; 1)$, $\vec{b} = (x - 4; 2)$.

ĐƯỜNG THẲNG

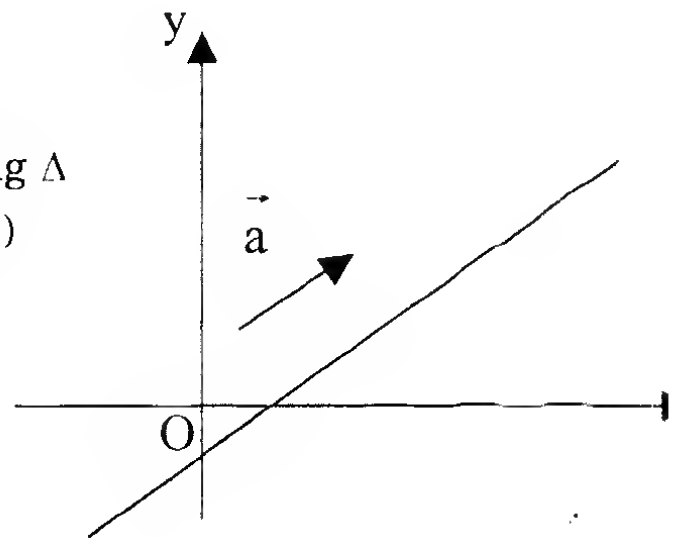
TÓM TẮT LÍ THUYẾT

I. Phương trình của đường thẳng

1. Phương trình tham số của đường thẳng Δ

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2)$ có phương trình tham số là: $\begin{cases} x = x_0 + ta_1 \\ y = y_0 + ta_2 \end{cases}$

$(a_1^2 + a_2^2 > 0)$.



2. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ

Đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2)$ c phương trình dạng chính tắc là: $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}$.

3. Phương trình đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và có hệ số góc k là:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

4. Nếu Δ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2)$ với $a_1 \neq 0$ thì có hệ số góc là $k = \frac{a_2}{a_1}$

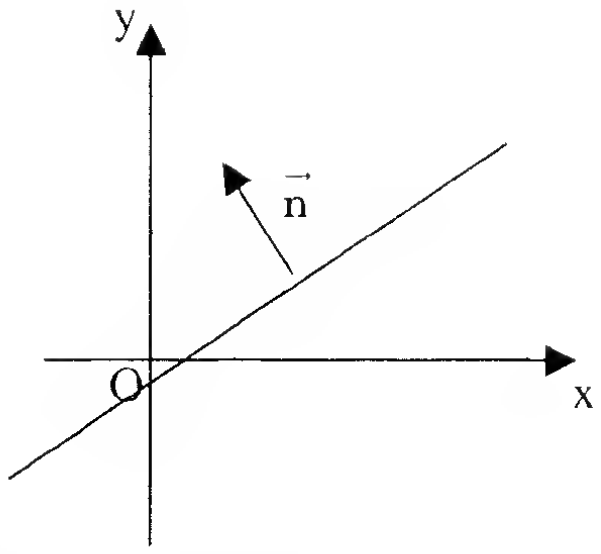
Nếu Δ có hệ số góc k thì có một vectơ chỉ phương $\vec{a}(1; k)$

Nếu Δ đi qua 2 điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ với $x_A \neq x_B$ thì Δ có hệ số góc $k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

5. Phương trình tổng quát của đường thẳng

a. Phương trình của đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B)$ là:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (A^2 + B^2 > 0)$$



b. Phương trình $Ax + By + C = 0$ với $A^2 + B^2 > 0$ được gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng.

c. Đường thẳng Δ cắt Ox và Oy lần lượt tại A(a; 0), B(0; b) có phương trình theo đoạn chắn là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $(a.b \neq 0)$.

Chú ý:

* Nếu Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(A; B)$ thì Δ có vectơ chỉ phương $\vec{a}(-B; A)$ và ngược lại.

* Nếu Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ thì mọi vectơ dạng $k.\vec{n}$ $(k \neq 0)$ đều là vectơ pháp tuyến của Δ. Đối với vectơ chỉ phương ta cũng có kết luận tương tự.

II.Vị trí tương đối của đường thẳng:

Cho 2 đường thẳng

$$\Delta_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$\Delta_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Đặt $D = A_1B_2 - A_2B_1$; $D_x = B_1C_2 - B_2C_1$; $D_y = C_1A_2 - C_2A_1$

Ta có:

a. Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow D \neq 0$; và tọa độ giao điểm là $(\frac{D_x}{D}; \frac{D_y}{D})$.

b. $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 0 \\ \left[\begin{array}{l} D_x \neq 0 \\ D_y \neq 0. \end{array}\right. \end{cases}$

c. $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow D = D_x = D_y = 0$

Chú ý: Nếu $A_2B_2C_2 \neq 0$ các điều kiện ở a, b, c có thể phát biểu như sau:

$$\Delta_1 \text{ cắt } \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}.$$

$$\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

$$\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

III. Góc giữa 2 đường thẳng

Góc giữa 2 đường thẳng Δ_1, Δ_2 được tính bởi công thức:

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = |\cos(\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2})| = \frac{|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|.|\overrightarrow{n_2}|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

$\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$

IV. Khoảng cách từ điểm đến một đường thẳng

Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0)$ đến đường thẳng Δ $Ax + By + C = 0$ được cho bởi công thức: $d(M; \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

IV. Dấu của biểu thức Ax + By + C

Đường thẳng Δ: $Ax + By + C = 0$ chia mặt phẳng Oxy thành hai nửa mặt phẳng có bờ là Δ

* Một nửa mặt phẳng chứa các điểm $M_1(x_1; y_1)$ ứng với $Ax_1 + By_1 + C >$

* Một nửa mặt phẳng chứa các điểm $M_2(x_2; y_2)$ ứng với $Ax_2 + By_2 + C <$

Trong thực hành giải toán ta thường sử dụng 2 mệnh đề sau:

a. Điều kiện cần và đủ để 2 điểm $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ khác phía so với đường thẳng

Δ: $Ax + By + C = 0$ là $(Ax_1 + By_1 + C)(Ax_2 + By_2 + C) < 0$

b. Điều kiện cần và đủ để 2 điểm $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ cùng phía s với đường thẳng

Δ: $Ax + By + C = 0$ là $(Ax_1 + By_1 + C)(Ax_2 + By_2 + C) > 0$.

BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

BT1: Lập phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng d trong mỗi trường hợp :

a. đ đi qua điểm M(2; 1) và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (3; 4)$.

b. d đi qua điểm $M(-2; 3)$ và có vectơ chỉ phương vuông góc với vect $\vec{n} = (5; 1)$.

c. d đi qua M(2; 4) và có hệ số góc $k = 2$.

d. đ đi qua 2 điểm A(3; 5) và B(6; 2).

Giải:

a. Phương trình tham số của đ: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + 4t \end{cases}$

Phương trình chính tắc của đ: $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4}$

b. d vuông góc với vectơ $\vec{n} = (5; 1)$ nên d có vectơ chỉ phương $\vec{a}(-1; 5)$

Vậy d có phương trình tham số : $\begin{cases} x = -2 - t \\ y = 3 + 5t \end{cases}$

và có phương trình chính tắc : $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-3}{5}$.

c. d có hệ số góc $k = 2$ nên d có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1; 2)$ và d đi qua $M(2; 4)$

Vậy d có phương trình tham số : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 + 2t \end{cases}$

Và phương trình chính tắc $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2}$.

d. d đi qua 2 điểm A, B nên d có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (3; -3)$ nên cũng có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = (1; -1)$

Vậy d có phương trình tham số: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 - t \end{cases}$

và có phương trình chính tắc : $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-1}$.

BT2: Lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp:

a. Δ đi qua $M(3; 4)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-2; 1)$.

b. Δ đi qua $M(2; -3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; 3)$.

c. Δ đi qua $M(-5; -8)$ và có hệ số góc $k = -3$.

d. Δ đi qua 2 điểm $A(2; 1)$, $B(-4; 5)$.

Giải:

a. Δ có phương trình dạng:

$$-2(x - 3) + 1(y - 4) = 0 \Leftrightarrow -2x + y + 2 = 0 \qquad (*)$$

Vậy Δ có phương trình tổng quát là (*)

Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-2; 1)$ nên có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1; 2)$

Vậy Δ có phương trình tham số: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + 2t \end{cases}$

Có thể từ (*) suy ra phương trình tham số như sau:

Trong (*) cho $x = t \Rightarrow y = 2t - 2$

Vậy d có phương trình tham số : $\begin{cases} x = t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$

b. Δ có phương trình tham số: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 + 3t \end{cases}$

Δ có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (2; 3)$ nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(3; -2)$

Vậy Δ có phương trình:

$$3(x - 2) - 2(y + 3) = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y - 12 = 0 \quad (**)$$

Nên Δ có phương trình tổng quát là (**).

c. Δ có hệ số góc $k = -3$ nên có phương trình

$$y + 8 = -3(x + 5) \Leftrightarrow 3x + y + 23 = 0 \quad (***)$$

Vậy Δ có phương trình tổng quát là (***)

Δ có hệ số góc $k = -3$ nên có vectơ chỉ phương $\vec{a}(1; -3)$

Vậy Δ có phương trình tham số : $\begin{cases} x = -5 + t \\ y = -8 - 3t. \end{cases}$

d. Δ đi qua 2 điểm A, B nên có vectơ chỉ phương $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (-6; 4)$ và vì vậy cũng có vectơ chỉ phương $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (-3; 2)$ nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(2; 3)$

Vậy Δ có phương trình tham số : $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$

Δ đi qua A và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(2; 3)$ nên có phương trình

$$2(x - 2) + 3(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 7 = 0 \quad (****)$$

Vậy Δ có phương trình tổng quát là (****)

Chú ý:

1. Để viết phương trình tham số và phương trình chính tắc của đường thẳng Δ ta cần tìm một vectơ chỉ phương và một điểm của đường thẳng đó.

2. Để viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ ta cần tìm một điểm và một vectơ pháp tuyến của đường thẳng đó sau đó dùng công thức

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Và cuối cùng biến đổi về dạng tổng quát.

BT3: Cho tam giác ABC biết A(1; 4), B(3; −1) và C(6; 2)

a. Lập phương trình các đường thẳng AB, BC, CA

b. Lập phương trình các đường cao AH và phương trình trung tuyến A

Giải:

a. Đường thẳng AB đi qua A(1; 4) và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (2; -$ nên có phương trình chính tắc: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-5}$ (1)

Có thể biến đổi về phương trình tổng quát bằng phép biến đổi tương đương như sau

(1) $\Leftrightarrow$ $5(x - 1) = 2(y - 4) \Leftrightarrow -5x + 5 = 2y - 8 \Leftrightarrow 5x + 2y - 13 = 0$

Đường thẳng BC qua B và có vectơ chỉ phương $\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = (1; 1)$ nên có phương trình chính tắc: $\frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{1}$

Đường thẳng CA qua C và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{CA} = (-5; 2)$ nên có phương trình tham số: $\frac{x-6}{-5} = \frac{y-2}{2}$.

b. Vì AH $\perp$ BC nên AH đi qua A và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 1)$ nên có phương trình: $1(x - 1) + 1(y - 4) = 0 \Leftrightarrow x + y - 5 = 0$

M là trung điểm của BC nên có tọa độ $(\frac{9}{2}; \frac{1}{2})$

AM đi qua A và có vectơ chỉ phương $\frac{7}{2}\overrightarrow{AM} = (1; -1)$ nên có phương trình chính tắc: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-1} \Leftrightarrow x - 1 = 4 - y \Leftrightarrow x + y - 5 = 0$

Chú ý rằng tam giác ABC cân tại A nên trung tuyến AM $\equiv$ AH.

BT4: Cho điểm M(1; 2). Lập phương trình của đường thẳng qua M chắn trên 2 trục tọa độ hai đoạn có độ đài bằng nhau

Giải:

Đường thẳng d chắn trên 2 trục tọa độ những đoạn bằng nhau nên qua 2 điểm A(a; 0) và B(0; a) hoặc A(a; 0) và B(0; $-a$) ($a > 0$)

TH1: A(a; 0), B(0; a)

Phương trình của d có dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow x + y - a = 0$

Vì d đi qua M(1;2) nên: $1 + 2 - a = 0 \Leftrightarrow a = 3$

Vậy d có phương trình $x + y - 3 = 0$.

TH2: A(a; 0) và B(0; $-a$). Phương trình d có dạng:

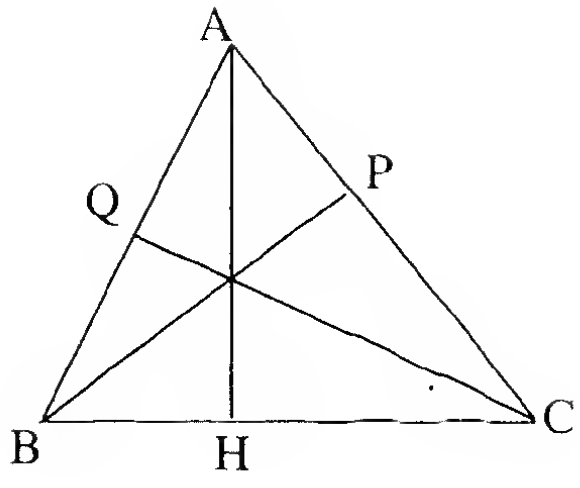
$$\frac{x}{a} - \frac{y}{a} = 1 \Leftrightarrow x - y - a = 0$$

Vì d đi qua M(1; 2) nên: $1 - 2 - a = 0 \Leftrightarrow a = -1$

Vậy d có phương trình $x - y + 1 = 0$.

BT5: Cho tam giác ABC biết đường thẳng AB: $4x + y - 12 = 0$, đường cao BP: $5x - 4y - 15 = 0$, và đường cao AH: $2x + 2y - 9 = 0$. Viết phương trình các cạnh và đường cao CQ của tam giác ABC

Giải:



B là giao điểm của AB và BP

⇒ tọa độ của B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 4x + y - 12 = 0 \\ 5x - 4y - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B(3;\ 0)$$

Tương tự tọa độ của A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 4x + y - 12 = 0 \\ 2x + 2y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(\frac{5}{2};\ 2)$$

Đường thẳng BP có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ = (5; −4) nên có vectơ chỉ phương $\vec{a}$ = (4; 5).

⇒ Đường thẳng AC đi qua A và nhận $\vec{a}$ = (4; 5) làm vectơ pháp tuyến (Do AC ⊥ BP) nên có phương trình:

$$4(x - \frac{5}{2}) + 5(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 4x - 10 + 5y - 10 = 0 \Leftrightarrow 4x + 5y - 20 = 0$$

Tương tự đường thẳng BC đi qua B và có vectơ pháp tuyến $\vec{n_1}$ = (1; −1 nên có phương trình: $1(x - 3) - 1(y - 0) = 0 \Leftrightarrow x - y - 3 = 0$

Tọa độ giao điểm của C của BC và AC là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 4x + 5y - 20 = 0 \\ x - y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{35}{9} \\ y = \dfrac{8}{9} \end{cases}$$ Vậy $C(\frac{35}{9};\ \frac{8}{9})$

AB có vectơ chỉ phương $\vec{a_1}$ = (1; −4)

Vì đường cao CQ vuông góc AB nên CQ đi qua C và có vectơ pháp tuyến $\vec{a_1}$ = (1; −4) nên có phương trình

$$1(x - \frac{35}{9}) - 4(y - \frac{8}{9}) = 0 \Leftrightarrow x - 4y - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow 3x - 12y - 1 = 0.$$

BT6: Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng

a. d_1: $4x - 10y + 1 = 0$, d_2: $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 - 2t \end{cases}$

b. d_1: $12x - 6y + 10 = 0$, d_2: $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$

c. d_1: $8x + 10y - 12 = 0$, d_2: $\begin{cases} x = -6 + 5t \\ y = 6 - 4t \end{cases}$

Giải:

a. *Cách 1:* Viết d_2 dưới dạng tổng quát

d_2 đi qua điểm M(1; −3) và có vectơ chỉ phương $\vec{a}$ (2; −2) nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ = (1; 1)

Vậy d_2 có phương trình: $1(x - 1) + 1(y + 3) = 0 \Leftrightarrow x + y + 2 = 0$

Ta có $D = \begin{vmatrix} 4 & -10 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14 \neq 0$ nên d_1 cắt d_2

Cách 2: Xét hệ phương trình: $\begin{cases} 4x - 10y + 1 = 0 \\ x = 1 + 2t \\ y = -3 - 2t \end{cases}$ (1)

$\Rightarrow 4(1 + 2t) - 10(-3 - 2t) + 1 = 0 \Leftrightarrow 28t + 35 = 0$ (*)

(*) có nghiệm duy nhất t nên (1) có nghiệm duy nhất x, y

Vậy d_1 cắt d_2.

Chú ý: Để xét vị trí tương đối của 2 dường thẳng d_1, d_2 ngoài phương pháp đã trình bày trong SGK, ta còn có thể giải cách khác như sau:

* Lập hệ phương trình gồm phượng trình của d_1 và d_2.

* Biện luận số nghiệm của hệ trên

- Nếu hệ trên có nghiệm duy nhất ta kết luận d_1 và d_2 cắt nhau, hơn nữa nghiệm (x, y) của hệ là tọa độ giao điểm của d_1 và d_2
- Nếu hệ trên vô nghiệm ta kết luận d_1 và d_2 song song nhau
- Nếu hệ trên có ít nhất 2 nghiệm ta kết luận d_1 và d_2 trùng nhau.

b. *Cách 1:* Viết d_2 dưới dạng tổng quát

d_2 đi qua điểm M(5; 3) và có vectơ chỉ phương $\vec{a}$ (1; 2) nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ = (2; −1)

Vậy d_2 có phương trình: $2(x - 5) - 1(y - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 7 = 0$

Ta có $D = \begin{vmatrix} 12 & -6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$; $D_x = \begin{vmatrix} -10 & -6 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 52 \neq 0$ nên d_1 // d_2

Cách 2: Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} 12x - 6y + 10 = 0 \\ x = 5 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases} \quad (2)$$

$\Rightarrow 12(5 + t) - 6(3 + 2t) + 10 = 0 \Leftrightarrow 0t + 52 = 0$ (**)

phương trình (**) vô nghiệm nên (1) vô nghiệm

Vậy $d_1 // d_2$.

c. Ta giải bằng cách 2:

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} 8x + 10y - 12 = 0 \\ x = -6 + 5t \\ y = 6 - 4t \end{cases}$ (3)

$\Rightarrow 8(-6 + 5t) + 10(6 - 4t) - 12 = 0 \Leftrightarrow 0t + 0 = 0$ (***)

(***) có nghiệm là mọi t $\Rightarrow$ (3) có mọi nghiệm dạng $x = -6 + 5t$, $y = 6 - 4t$

Vậy $d_1 \equiv d_2$.

BL1: Xác dịnh m để hai đường thẳng

$d_1: x + my - 1 = 0$; $d_2: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$

a. Cắt nhau; b. Song song nhau; c. Trùng nhau.

Giải:

Cách 1: d_2 đi qua điểm M(4; 1) và có VTPT $\vec{n}(3; 2)$ nên có phương trình

$$3(x - 4) + 2(y - 1) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2y - 14 = 0$$

Ta có: $D = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3m$; $D_x = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 14 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 14m$; $D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 14 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$

a. d_1 và d_2 cắt nhau $\Leftrightarrow D = 2 - 3m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{2}{3}$.

b. Vì $D_y \neq 0$ nên $d_1 // d_2 \Leftrightarrow D = 0 \Leftrightarrow 2 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$.

c. Vì $D_y \neq 0$ nên 2 đường thẳng trên không trùng nhau.

Cách 2: Xét hệ phương trình : $\begin{cases} x + my - 1 = 0 \\ x = 4 - 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$ (1)

$\Rightarrow (4 - 2t) + m(1 + 3t) - 1 = 0 \Leftrightarrow (3m - 2)t + m + 3 = 0$ (*)

a. d_1 cắt $d_2 \Leftrightarrow$ (*) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow 3m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{2}{3}$.

b. $d_1 // d_2 \Leftrightarrow$ (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 2 = 0 \\ m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$.

c. $d_1 \equiv d_2 \Leftrightarrow$ (*) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 2 = 0 \\ m + 3 = 0 \end{cases}$ hệ vô nghiệm.

Vậy không có giá trị nào của m để $d_1 \equiv d_2$.

BL2: Xác Định m để đường thẳng : d_1: x − 2y + 1 = 0, d_2: $\begin{cases} x = 1 - mt \\ y = 3 + t \end{cases}$

a. Cắt nhau; b. Song song nhau; c. Trùng nhau.

BL3: Biện luận theo m vị trí tương đối của 2 đường thẳng

d_1 : $\begin{cases} x = 1 - m - mt \\ y = 1 + t \end{cases}$ d_2: $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$

HD: Xét hệ:

$$\begin{cases} x = 1 - m - mt \\ y = 1 + t \\ x = 4 - 2t_1 \\ y = 1 + 3t_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - m - mt = 4 - 2t_1 \\ 1 + t = 1 + 3t_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mt - 2t_1 = -3 - m \\ t - 3t_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m3t_1 - 2t_1 = -3 - m \\ t = 3t_1 \end{cases} \Rightarrow (3m - 2)t_1 = -3 - m \quad (*)$$

TH1: $3m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{2}{3}$

(*) có nghiệm duy nhất . Vậy d_1 cắt d_2

TH2: $3m - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$

(*) có dạng : $0x = -\frac{11}{3}$, phương trình vô nghiệm

Vậy $d_1 // d_2$.

Chú ý: Tham số t của đường thẳng d_1 độc lập với tham số t của d_2, vì vậy khi đưa vào hệ ta phải đổi kí hiệu một trong 2 tham số

BL4: Biện luận theo m vị trí tương đối cuả 2 đường thẳng:

a. d_1: x + my + m = 0 , d_2: x − 2my + 1 = 0

b. d_1: x + my + m = 0 , d_2 : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$

c. d_1 : $\begin{cases} x = 1 - m + mt \\ y = 1 + t \end{cases}$ d_2: $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 1 - 2t \end{cases}$

BT7: Cho đường thẳng d có phương trình tham số : $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$

a. Tìm điểm M thuộc d cách điểm A (0; 1) một khoảng bằng 5

b. Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng d và đường thẳng Δ:

x + y + 1 = 0.

Giải:

a. Điểm M thuộc d nên có tọa độ M(2 + 2t; 3 + t)

M cách A một khoảng bằng 5 có nghĩa là

$MA = 5 \Leftrightarrow MA^2 = 25 \Leftrightarrow (2 + 2t)^2 + (3 + t - 1)^2 = 25$

$\Leftrightarrow 4 + 8t + 4t^2 + 4 + 4t + t^2 = 25 \Leftrightarrow 5t^2 + 12t - 17 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -\dfrac{17}{5} \end{array}\right.$$

$t = 1 \Rightarrow M(4; 4)$

$t = -\dfrac{17}{5} \Rightarrow M(-\dfrac{24}{5}; -\dfrac{2}{5})$.

b. Tọa độ giao điểm của d và Δ là nghiệm (x, y) của hệ

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x = 2 + 2t \quad (1) \\ y = 3 + t \quad (2) \end{cases} \Rightarrow 2 + 2t + 3 + t + 1 = 0 \Leftrightarrow 3t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -2$$

Thế t vào (1) và (2) ta có $x = -2$ và $y = 1$

Vậy d và Δ cắt nhau tại điểm có tọa độ $(-2; 1)$.

BL1: Tìm tọa độ giao điểm của 2 đường thẳng

$$d_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}, \qquad d_2: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 4 - 2t \end{cases}$$

Giải:

Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} x = 1 - t \quad (1) \\ y = 2 + 3t \quad (2) \\ x = -1 + 2t_1 \\ y = 4 - 2t_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - t = -1 + 2t_1 \\ 2 + 3t = 4 - 2t_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + 2t_1 = 2 \\ 3t + 2t_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t_1 = 1 \end{cases}$$

Thế $t = 0$ vào (1) và (2) ta có: $x = 1$ và $y = 2$

Vậy 2 đường thẳng trên cắt nhau tại điểm có tọa độ $(1; 2)$.

BL2: Tìm tọa độ giao điểm của 2 đường thẳng sau:

$$d_1: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}, \quad d_2: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 4 - 5t \end{cases}$$

BL3: Cho điểm A(1; 0) và đường thẳng d: $x + y + 2 = 0$

a. Tìm điểm M thuộc d sao cho AM ngắn nhất.

b. Tìm hình chiếu M_0 của A lên d

c. Cho B(2; 2) tìm N thuộc d sao cho N cách đều A, B

HD:

a $M(t; -t-2) \in d$

$$AM^2 = (t-1)^2 + (t+2)^2 = 2t^2 + 2t + 5 = 2(t + \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{2} \geq \frac{9}{2}$$

Dẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow t = -\frac{1}{2}$

Vậy điểm M cần tìm có toạ độ $M(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2})$.

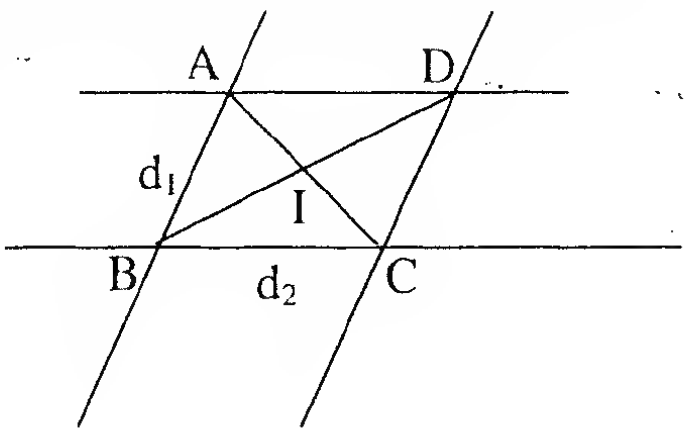
b. Điểm M_0 cần tìm là điểm M ở câu a.

c. $N(t; -t-2) \in d$. Hãy giải phương trình $NA^2 = NB^2$.

BT8: Một hình bình hành có 2 cạnh nằm trên 2 đường thẳng $x + 3y - 6 = 0$ và $2x - 5y - 1 = 0$. Tâm của hình bình hành là điểm I(3; 5). Viết phương trình 2 đường thẳng chứa 2 cạnh còn lại của hình bình hành đó.

Giải:

Vì 2 đường thẳng d_1: $x + 3y - 6 = 0$ và d_2: $2x - 5y - 1 = 0$ cắt nhau nên đó chính là phương trình của 2 đường thẳng chứa 2 cạnh kề AB và BC của hình bình hành ABCD



Vì vậy toạ độ của B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + 3y - 6 = 0 \\ 2x - 5y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow B(3; 1)$

I là trung điểm BD.

ta có: $\begin{cases} x_I = \frac{x_B + x_D}{2} \\ y_I = \frac{y_B + y_D}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \frac{3 + x_D}{2} \\ 5 = \frac{1 + y_D}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 3 \\ y_D = 9 \end{cases} \Rightarrow D(3; 9)$

Vì AD // BC nên AD có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2; -5)$ và vì vậy có phương trình : $2(x - 3) - 5(y - 9) = 0 \Leftrightarrow 2x - 5y + 39 = 0$

Tương tự DC có vectơ pháp tuyến $\vec{n_1} = (1; 3)$ nên có phương trình :

$$1(x - 3) + 3(y - 9) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 30 = 0$$

Vậy 2 đường thẳng chứa 2 cạnh còn lại của hình bình hành lần lượt có phương trình: $2x - 5y + 39 = 0$, $x + 3y - 30 = 0$.

BT9: Tính góc giữa 2 đường thẳng tương ứng sau:

d_1: $4x - 2y + 9 = 0$, d_2: $x - 3y + 1 = 0$

HD: Sử dụng công thức $\cos(d_1, d_2) = \frac{|A_1.A_2 + B_1.B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

Giải:

Ta có $\cos(d_1, d_2) = \dfrac{|A_1.A_2 + B_1.B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \dfrac{|4.1 + (-2).(-3)|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}\sqrt{1^2 + (-3)^2}}$

$= \dfrac{10}{\sqrt{20}\sqrt{10}} = \dfrac{10}{10\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (d_1, d_2) = 45^0.$

BT10: Tìm các khoảng cách từ các điểm đến các đường thẳng tương ứng sau đây

a. A(3; 5) và Δ: 4x + 3y + 1 = 0; b. B(1; −2) và d: 3x − 4y − 26 = 0;

c. I(1; 2) và l: 3x + 4y − 11 = 0.

HD: Sử dụng công thức: $d(M; \Delta) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Giải:

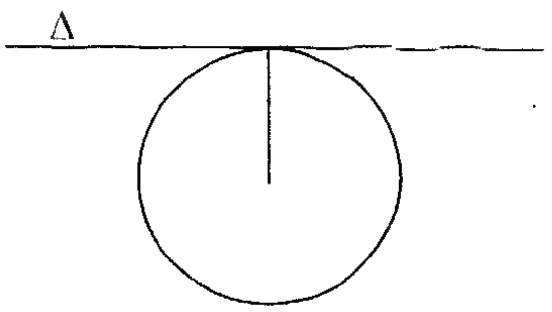
a. Khoảng cách từ A đến Δ là:

$$d(M; \Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|4.3 + 3.5 + 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{28}{5}$$

b.c.d. Giải tương tự.

BT11: Tìm bán kính của đường tròn tâm C(−2; −2) và tiếp xúc với đường thẳng Δ: 5x + 12y − 10 = 0

HD: Bán kính của đường tròn tâm C bằng khoảng cách từ tâm C đến dường thẳng Δ d(C, Δ).



BT12: Tìm tập hợp các điểm cách dường thẳng 4x + 3y − 1 = 0 một khoảng cách bằng 3.

HD: Để tìm tập hợp các điểm M(x, y) thỏa tính chất (p) ta tìm hiểu thức liên hệ x, y: f(x, y) = 0 (L); (L) là tập hợp cần tìm.

Giải:

Gọi M(x; y) cách đường thẳng 4x + 3y − 1 = 0 một khoảng cách bằng 3

$$\Leftrightarrow d(M; \Delta) = \frac{|4x + 3y - 1|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \Leftrightarrow \frac{|4x + 3y - 1|}{5} = 3$$

$$\Leftrightarrow |4x + 3y - 1| = 15 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4x + 3y - 1 = 15 \\ 4x + 3y - 1 = -15 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4x + 3y - 16 = 0 \quad (1) \\ 4x + 3y + 14 = 0 \quad (2) \end{bmatrix}$$

Vậy tập hợp các điểm M là 2 dường thẳng lần lượt có phương trình (1) và (2)

Chú ý: $|A| = |B| \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A = B \\ A = -B. \end{bmatrix}$

BL1: Cho A(1; 1), B(−1; 2). Viết phương trình đường trung trực Δ của đoạn AB.

HD: $M(x; y) \in \Delta \Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (x + 1)^2 + (y - 2)^2$

Thu gọn ta được phương trình của trung trực Δ.

BL2: Cho 2 điểm A(1; 4) và B(−2; 6). Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm M(2; 2) sao cho A, B cách đều d.

HD: d: $a(x - 2) + b(y - 2) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 2a - 2b = 0 \quad (a^2 + b^2 > 0)$

A, B cách đều d $\Leftrightarrow$ d(A; d) = d(B; d) (*)

Từ (*) ta thu được phương trình 2 đường thẳng.

BÀI TẬP BỔ SUNG

BT13: Viết phương trình đường thẳng d đi qua 2 điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B, y_B)$

HD: Gọi M(x; y) ta có:

$\overrightarrow{AM} = (x - x_A; y - y_A)$; $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$

$M(x; y) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \boxed{(y_B - y_A)(x - x_A) - (x_B - x_A)(y - y_A) = 0 \ (*)}$$

(*) là phương trình đường thẳng qua A, B.

BT14: Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với đường thẳng Δ:

$3x + 4y + 5 = 0$ và d cách O(0; 0) một khoảng bằng 1.

HD: $d \perp \Delta$ nên d có phương trình dạng : d: $4x - 3y + C = 0$

d cách O(0; 0) một khoảng bằng 1 $\Leftrightarrow$ d(O; d) = 1 $\Leftrightarrow \dfrac{|C|}{5} = 1$

$$\Leftrightarrow |C| = 5 \Leftrightarrow C = \pm 5$$

Vậy có 2 đường thẳng d.

BT15: Viết phương trình đường thẳng d đi qua N(1; 3) biết M(0; 6) cách d một khoảng bằng 1.

Giải:

d đi qua N nên có phương trình:

$A(x - 1) + B(y - 3) = 0 \Leftrightarrow Ax + By - A - 3B = 0 \quad (A^2 + B^2 > 0)$

M(0; 6) cách d một khoảng bằng 1 $\Leftrightarrow$ d(M; d) = 1.

$$\Leftrightarrow \frac{|-A + 3B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 1 \Leftrightarrow |-A + 3B| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\Leftrightarrow A^2 - 6AB + 9B^2 = A^2 + B^2 \Leftrightarrow 8B^2 - 6AB = 0$$

$$\Leftrightarrow 2B(4B - 3A) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ 4B - 3A = 0 \end{cases}$$

TH1: B = 0, chọn A = 1, d: x − 1 = 0

TH2: 4B − 3A = 0, chọn A = 4, B = 3, d: 4x + 3y − 13 = 0.

Chú ý: Để viết phương trình đường thẳng d đi qua $M(x_0; y_0)$ và thỏa tính chất p nào đó, ta có thể thực hiện theo các bước sau:

* d đi qua M nên có phương trình dạng:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (A^2 + B^2 > 0)$$

* Từ điều kiện p ta thu được phương trình thuần nhất dẳng cấp theo A, B

* Vì A, B sai khác một thừa số khác không, nên để giải các phương trình trên ta chỉ việc chọn A tính B hoặc ngược lại sao cho $A^2 + B^2 > 0$

BL1: Viết phương trình đường thẳng d đi qua M(1; 0) sao cho d hợp với Δ: x + 2y = 0 một góc 45^0.

Giải:

d đi qua M nên có phương trình:

$$A(x - 1) + B(y - 0) = 0 \Leftrightarrow Ax + By - A = 0 \quad (A^2 + B^2 > 0)$$

d hợp với Δ góc 45^0 ta có:

$$\cos 45^0 = \frac{|1.A + 2.B|}{\sqrt{1^2 + 2^2}\sqrt{A^2 + B^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|A + 2B|}{\sqrt{5}\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{2}|A + 2B|$$

$$\Leftrightarrow 5(A^2 + B^2) = 2(A + 2B)^2 \Leftrightarrow 5A^2 + 5B^2 = 2A^2 + 8AB + 8B^2$$

$$\Leftrightarrow 3A^2 - 8AB - 3B^2 = 0$$

Đây là phương trình thuần nhất dẳng cấp bậc 2 dối với A, B

Chọn B = 1 ta có: $3A^2 - 8A - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{1}{3} \\ A = 3 \end{cases}$

* B = 1, $A = -\frac{1}{3}$; d: $-\frac{1}{3}x + y + \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow -x + 3y + 1 = 0$ (1)

* B = 1, A = 3; d: 3x + y − 3 = 0 (2)

Vậy có 2 đường thẳng d có phương trình là (1), (2)

BL2: Cho điểm A(2; 3) và đường thẳng d: x − y = 0. Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác dều ABC sao cho B, C thuộc đường thẳng d.

HD: Viết phương trình đường thẳng Δ qua A và hợp với d góc 60^0; có 2 đường thẳng Δ như thế 2 đường thẳng này chứa 2 cạnh AB, AC của tam giác ABC.

BL3: Cho O(0; 0). Viết phương trình đường thẳng d đi qua A(−1; 1) sao cho O cách d một khoảng bằng $\frac{1}{5}$.

HD: d: $A(x + 1) + B(y - 1) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + A - B = 0 \quad (A^2 + B^2 > 0)$

$$d(O; d) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{|A - B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5|A - B| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\Leftrightarrow 24A^2 - 50AB + 24B^2 = 0$$

Chọn B = 1: ta có $24A^2 - 50A + 24 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = \frac{3}{4} \\ A = \frac{4}{3} \end{array}\right.$. Ta có 2 đường thẳng d.

(Bạn đọc tự viết phương trình 2 đường thẳng d).

BT16: Lập phương trình các cạnh của hình vuông ABCD biết A(1; 0) tâm (1; 1).

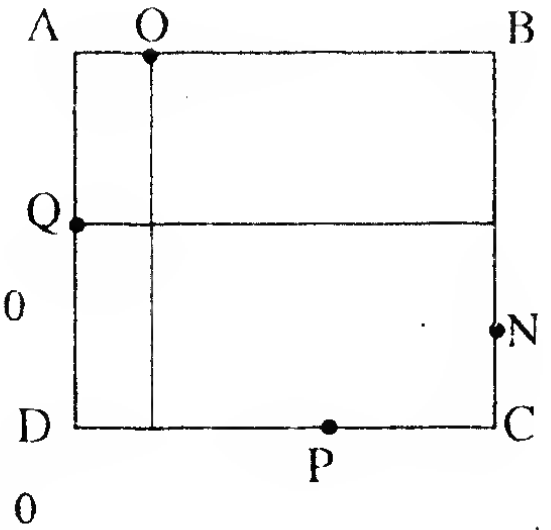
HD: Tìm toạ độ các đỉnh

* Tìm C dựa vào I là trung điểm của AC.

* Tìm B dựa vào BI = AI và $\overrightarrow{IB}$ vuông góc với $\overrightarrow{AI}$.

BT17: Cho O(0; 0); N(−2; 2), P(2; 4), Q(−3; −1). Viết phương trình các cạnh của hình vuông, biết O, N, P, Q lần lượt thuộc các đường thẳng AB, BC, CD, DA của hình vuông ABCD.

Giải:



AB đi qua O có phương trình dạng :

$Ax + By = 0 \quad (A^2 + B^2 > 0)$

BC đi qua N và vuông góc với AB nên có phương trình:

$B(x + 2) - A(y - 2) = 0 \Leftrightarrow Bx - Ay + 2A + 2B = 0$

CD đi qua P và song song với AB nên có phương trình:

$A(x - 2) + B(y - 4) = 0 \Leftrightarrow Ax + By - 2A - 4B = 0$

DA đi qua Q và song song với BC nên có phương trình:

$B(x + 3) - A(y + 1) = 0 \Leftrightarrow Bx - Ay - A + 3B = 0$

Ta có: $d(O; CD) = d(Q; BC) \Leftrightarrow \dfrac{|-2A-4B|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \dfrac{|3A-B|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$\Leftrightarrow |2A+4B| = |3A-B| \Leftrightarrow \begin{cases} 2A+4B = 3A-B \\ 2A+4B = -3A+B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 5B \\ 5A = -3B \end{cases}$

TH1: A = 5B, chọn B = 1, A = 5

Ta có phương trình bốn đường thẳng chứa các cạnh của hình vuông

$5x + y = 0$; $x - 5y + 12 = 0$; $5x + y - 14 = 0$; $x - 5y - 2 = 0$.

TH2: 5A = −3B, chọn A = 3, B = −5

Bạn đọc hãy viết phương trình các cạnh của hình vuông cho trường hợp này.

BL1: Cho 3 điểm I(1; 1), M(−2; 2), N(2; −2). Viết phương trình các cạnh của hình vuông, sao cho I là tâm của hình vuông. M, N nằm trên 2 đường thẳng song song chứa 2 cạnh của hình vuông.

BL2: Cho I(1; −1), M(2; 3) và N(5; 0). Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD sao cho I là tâm của hình vuông, M thuộc AB và N thuộc cạnh BC.

ĐS: A(−3; 3), B(5; 3), C(5; −5), D(−3; −5)

Ta có phương trình bốn đường thẳng chứa các cạnh của hình vuông

$3x - 5y = 0$; $-5x - 3y - 4 = 0$; $3x - 5y + 14 = 0$; $-5x - 3y - 18 =$

BT18: Trong mặt phẳng Oxy cho A(−2; 3) và đường thẳng d: $2x - y + 1 =$ Tìm điểm B thuộc đường thẳng d_1: $12x - 7y + 15 = 0$ sao cho đường thẳng qua AB cắt d tại trung điểm của AB.

Giải:

Gọi $B(x_0; y_0) \Rightarrow 12x_0 - 7y_0 + 15 = 0$

Gọi M là trung điểm của AB $\Rightarrow M(\dfrac{x_0-2}{2}; \dfrac{y_0+3}{2})$

$M \in d \Leftrightarrow 2(\dfrac{x_0-2}{2}) - \dfrac{y_0+3}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow 2x_0 - 4 - y_0 - 3 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 2x_0 - y_0 - 5 = 0$

Ta có hệ : $\begin{cases} 12x_0 - 7y_0 + 15 = 0 \\ 2x_0 - y_0 - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 25 \\ y_0 = 45 \end{cases}$

Vậy điểm B(25; 45).

BT19: Cho 2 đường thẳng: d: $x + y = 0$, $đ_1$: $x - 2y - 3 = 0$ và điểm A(0

Tìm điểm $M \in d$, $N \in đ_1$ sao cho A là trung điểm của MN.

HD: Bài toán có 4 ẩn (tọa độ của M và tọa độ của N)

Ta dùng phương pháp tham số hóa để giảm số ẩn của bài toán ngay từ đầu

$M \in d \Rightarrow M(t; -t)$. $N \in d_1 \Rightarrow N(2t_1 + 3; t_1)$. Bài toán còn 2 ẩn t, t_1

A là trung điểm của MN $\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \dfrac{t + 2t_1 + 3}{2} \\ 1 = \dfrac{-t + t_1}{2} \end{cases}$

Giải hệ này ta có t, t_1 từ đó suy ra tọa độ M, N.

Г20: Biện luận theo m vị trí tương đối của 2 đường thẳng d:

$mx + y + 2 = 0$; d_1: $x + my + m + 1 = 0$ (SBT)

Giải:

Xét hệ $\begin{cases} mx + y + 2 = 0 \\ x + my + m + 1 = 0 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1$; $D_x = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -m-1 & m \end{vmatrix} = -2m + m + 1 = -m + 1$;

$D_y = \begin{vmatrix} m & -2 \\ 1 & -m-1 \end{vmatrix} = -m^2 - m + 2$

TH1: $D \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$

Hệ có nghiệm duy nhất, vì vậy 2 đường thẳng trên cắt nhau

TH2: $D = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m = 1 \\ m = -1 \end{bmatrix}$

a. $m = 1$: $D_x = D_y = 0$: Hệ có vô số nghiệm, vì vậy 2 đường thẳng trên ing nhau.

b. $m = -1$: $D_x \neq 0$: Hệ trên vô nghiệm, vì vậy 2 đường thẳng trên song ng nhau

Г21: Cho tam giác ABC có A(−2; 3) và 2 đường thẳng có phương trình

d_1: $2x - y + 1 = 0$, d_2: $x + y - 4 = 0$

Hãy viết phương trình ba cạnh của tam giác ABC biết:

a. d_1 là trung tuyến và d_2 là đường cao phát xuất từ 2 đỉnh khác nhau.

b. d_1 và d_2 là 2 trung tuyến (SBT).

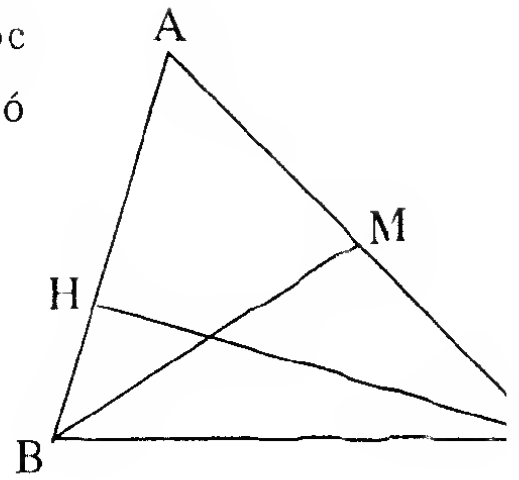
D: Ta tìm tọa độ 3 đỉnh của tam giác ABC. Sau đó sử dụng công thức u để viết phương trình các cạnh của tam giác

AB: $(y_B - y_A)(x - x_A) - (x_B - x_A)(y - y_A) = 0$ (*)

Giải:

Vì tọa độ của A không thỏa mãn phương trình của 2 đường thẳng d_1, nên $A \notin d_1$, $A \notin d_2$

a. Giả sử d_1 là trung tuyến BM và d_2 là đường cao CH



AB là đường thẳng đi qua A và vuông góc với CH nên có VTPT $\vec{n} = (1; -1)$ nên có phương trình:

$1(x + 2) - 1(y - 3) = 0 \Leftrightarrow x - y + 5 = 0$

B là giao điểm của AB và BM: $2x - y + 1 = 0$ nên tọa độ của B là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 9 \end{cases} \Rightarrow B(4; 9)$$

Vì CH: $x + y - 4 = 0 \Leftrightarrow y = -x + 4$

Mặt khác $C \in CH \Rightarrow C(x_0; 4 - x_0)$

Tương tự vì $M \in BM \Rightarrow M(x_1; 2x_1 + 1)$

Vì BM là trung tuyến của tam giác ABC nên M là trung điểm của .

Ta có: $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-2 + x_0}{2} \\ 2x_1 + 1 = \dfrac{3 + 4 - x_0}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_0 = -2 \\ 4x_1 + x_0 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \\ x_0 = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow C = (3; 1)$

$\Rightarrow CA: (1 - 3)(x + 2) - (3 + 2)(y - 3) = 0 \Leftrightarrow -2x - 5y + 11 = 0$

BC: $(1 - 9)((x - 4) - (3 - 4)(y - 9) = 0 \Leftrightarrow -8x + y + 23 = 0.$

b. Giả sử d_1 là trung tuyến BM và d_2 là trung tuyến CP

Giải tương tự như câu a ta có C(3; 1)

Gọi $B(x_2; 2x_2 + 1) \in BM$, $P(x_3; -x_3 + 4) \in CP$

Vì P là trung điểm AB ta có:

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{-2 + x_2}{2} \\ -x_3 + 4 = \dfrac{3 + 2x_2 + 1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_3 - x_2 = -2 \\ x_3 + x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow B(2;$$

Đã tìm được tọa độ 3 đỉnh, các bạn hãy viết phương trình các c của tam giác ABC.

BT22: Tìm phương trình các đường phân giác của các góc giữa 2 đư thẳng :

$\Delta_1: 2x + 4y + 7 = 0$ $\Delta_2: x - 2y - 3 = 0$ (SBT)

HD: M(x; y) thuộc các đường phân giác của các góc giữa 2 đường th Δ_1, Δ_2

$$\Leftrightarrow d(M, \Delta_1) = d(M, \Delta_2) \Leftrightarrow \frac{|2x + 4y + 7|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{|x - 2y - 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x+4y+7}{2\sqrt{5}} = \pm\frac{x-2y-3}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \frac{2x+4y+7}{2} = \pm(x-2y-3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2x+4y+7 = 2x-4y-6 \\ 2x+4y+7 = -2x+4y+6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8y+13=0 & (1) \\ 4x+1=0 & (2) \end{bmatrix}$$

Vậy 2 đường phân giác lần lượt có phương trình là (1), (2)

Chú ý: Cho 2 đường thẳng cắt nhau

$d_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $d_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$

Phương trình 2 đường phân giác của các góc tạo thành bởi d_1 và d_2 có dạng: $\dfrac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \pm\dfrac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$

Một phương trình ứng với dấu cộng. Một phương trình ứng với dấu trừ.

Bạn đọc nên chứng minh chú ý 2 như một bài tập (Sử dụng cách giải của BT2)

L1: Cho 2 đường thẳng $d_1: 3x + 4y - 4 = 0$ và $d_2: 12x - 5y + 5 = 0$. Viết phương trình các đường phân giác của các góc tạo thành bởi d_1 và d_2

T23: Cho A(0; 1), B(4; −2), C(5; 13). Viết phương trình đường phân giác trong của góc A của tam giác ABC.

Giải:

Cách 1:

Dựa vào cách giải BT22 ta viết phương trình 2 đường phân giác trong ngoài của góc A của tam giác ABC, trong 2 phân giác này ta định ra phân giác trong ngoài dựa vào nhận xet sau:

Nếu AD là đường phân giác trong thì B, C khác phía so với AD

Nếu AE là đường phân giác ngoài thì B, C cùng phía so với AE

Giải:

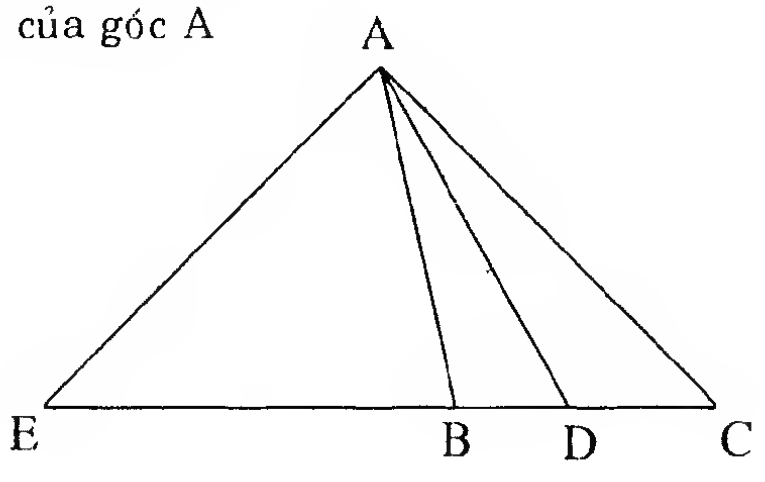
AB: $(-2-1)(x-0) - (4-0)(y-1) = 0 \Leftrightarrow -3x-4y+4=0 \Leftrightarrow 3x+4y-4=0$

AC: $(13-1)(x-0) - (5-0)(y-1) = 0 \Leftrightarrow 12x-5y+5=0$

Phương trình các đường phân giác của góc A

$$\frac{3x+4y-4}{\sqrt{3^2+4^2}} = \pm\frac{12x-5y+5}{\sqrt{12^2+5^2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{3x+4y-4}{5} = \dfrac{12x-5y+5}{13} \\ \dfrac{3x+4y-4}{5} = -\dfrac{12x-5y+5}{13} \end{bmatrix}$$



$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 39x + 52y - 52 = 60x - 25y + 25 \\ 39x + 52y - 52 = -60x + 25y - 25 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 21x - 77y + 77 = 0 \quad (1) \\ 99x + 27y - 27 = 0 \quad (2) \end{bmatrix}$$

Xét vị trí tương đối của B, C đối với đường thẳng d_1 có phương trình

Ta có: $(21.4 - 77.(-2) + 77)(21.5 - 77.13 + 77) < 0$

$\Rightarrow$B, C khác phía đối với $đ_1$

Vậy $đ_1$ chính là đường phân giác trong AD của góc A của tam giá ABC. Và vì vậy đường phân giác ngoài AE có phương trình là (2)

Cách 2:

HD: Ta đựa vào góc giữa 2 vectơ để giải bài toán đựa vào nhận xét sau

* Nếu $M \neq A$ và M thuộc đường phân giác trong AD

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC})$

* Nếu $M \neq A$ và M thuộc đường phân giác ngoài AE

$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \pi - (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = -\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC})$

(Hai góc bù nhau thì cos của chúng đối nhau).

Giải:

Gọi $M(x; y) \neq A$; AD và AE lần lượt là đường phân giác trong, ngoà của góc A của tam giác ABC

$\overrightarrow{AB} = (4; -3)$; $\overrightarrow{AC} = (5; 12)$; $\overrightarrow{AM} = (x; y-1)$, $AB = 5$; $AC = 13$

$M(x; y) \in AD \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC})$

$\Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC})$

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AM}\overrightarrow{AB}}{AM.AB} = \frac{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}}{AM.AC} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}}{AC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4.x - 3(y-1)}{5} = \frac{5.x + 12(y-1)}{13}$$

$\Leftrightarrow 52x - 39y + 39 = 25x + 60y - 60$

$\Leftrightarrow 27x - 99y + 99 = 0 \Leftrightarrow 3x - 11y + 11 = 0$

Vậy đường phân giác trong của góc A của tam giác ABC có phương trình $3x - 11y + 11 = 0$.

Viết đường phân giác ngoài bạn đọc giải tương tự.

BT24: Tìm phương trình của tập hợp các điểm cách đều 2 đường thẳng

$\Delta_1: 5x + 3y - 3 = 0$, $\Delta_2: 5x + 3y + 7 = 0$ (SBT).

HD: Lấy điểm M(x; y)

M cách đều 2 đường thẳng $\Delta_1, \Delta_2 \Leftrightarrow d(M; \Delta_1) = d(M; \Delta_2)$.

Giải:

M(x; y) cách đều 2 đường thẳng $\Delta_1, \Delta_2 \Leftrightarrow d(M; \Delta_1) = d(M; \Delta_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{|5x+3y-3|}{\sqrt{5^2+3^2}} = \frac{|5x+3y+7|}{\sqrt{5^2+3^2}} \Leftrightarrow |5x+3y-3| = |5x+3y+7|$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5x+3y-3 = 5x+3y+7 \\ 5x+3y-3 = -5x-3y-7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0x+0y-10 = 0 \quad (1) \\ 10x+6y+4 = 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow 10x + 6y + 4 = 0 \Leftrightarrow 5x + 3y + 2 = 0$ ((1) bị loại)

BT25:

a. Cho điểm A(−4; 4) và đường thẳng d_2: $3x-11y+11=0$. Tìm tọa độ điểm B đối xứng A qua d_2.

b. Cho đường thẳng d_1: $3x+4y-4=0$; d_2: $3x-11y+11=0$. Viết phương trình dường thẳng d_3 dối xứng với d_1 qua d_2.

HD:

a. Gọi B(x; y) ta lập hệ phương trình (gồm 2 phương trình) 2 ẩn x, y dựa vào tính chất sau $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với vectơ pháp tuyến của d_2 và trung điểm của AB nằm trên đường thẳng d_2.

Giải:

d_2 có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; -11)$

Gọi B(x; y). Ta có:

$\overrightarrow{AB} = (x+4; y-4)$; Trung điểm M của AB có tọa độ $(\frac{x-4}{2}; \frac{y+4}{2})$

B đối xứng với A qua $d_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ cùng phương $\vec{n}$ và $M \in d_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -11(x+4)-3(y-4)=0 \\ 3.\frac{x-4}{2}-11\frac{y+4}{2}+11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x+3y+32=0 \\ 3x-11y-34=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{25}{13} \\ y=-\frac{47}{13} \end{cases}$$

Vậy $B(-\frac{25}{13}; -\frac{47}{13})$.

b. Đường thẳng d_3 đối xứng với d_1 qua d_2 nên d_3 đi qua B và giao điểm I của d_1 và d_2.

Tọa độ giao điểm I là nghiệm (x; y) của hệ

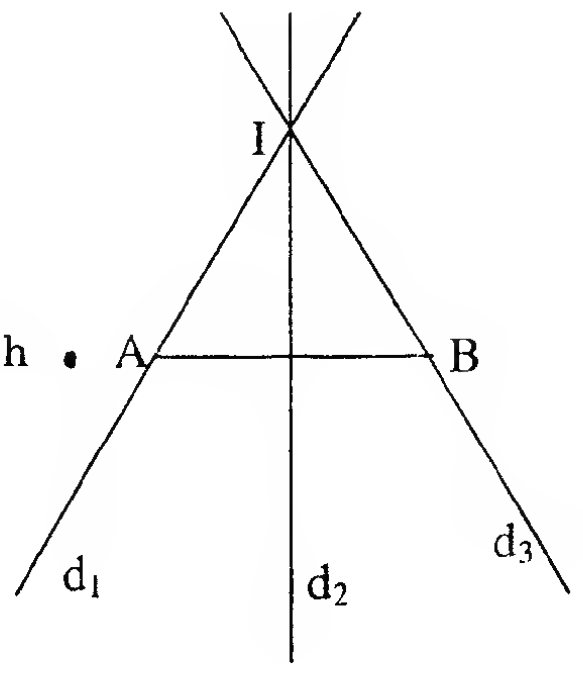
$$\begin{cases} 3x+4y-4=0 \\ 3x-11y+11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow I(0; 1)$$

Đường thẳng d_3 đi qua B, I nên có phương trình

$$(-\frac{47}{13}-1)(x-0) - (-\frac{25}{13}-0)(y-1) = 0$$

$\Leftrightarrow -60x + 25y - 25 = 0 \Leftrightarrow 12x - 5y + 5 = 0$

Có thể giải bằng phương pháp giải tích sau:



d_3 đi qua I(0; 1) nên có phương trình

d_3: $A(x-0) + B(y-1) = 0 \Leftrightarrow Ax + By - B = 0$

d_3 đối xứng với d_1 qua $d_2 \Rightarrow \cos(d_1; d_2) = \cos(d_2; d_3)$

$$\Leftrightarrow \frac{|3.3 - 4.1|}{\sqrt{25}\sqrt{130}} = \frac{|3A - 11B|}{\sqrt{130}\sqrt{A^2 + B^2}} \Leftrightarrow 7\sqrt{A^2 + B^2} = |3A\text{-}11B|$$

$$\Leftrightarrow 49(A^2 + B^2) = 9A^2 - 66AB + 121B^2 \Leftrightarrow 40A^2 + 66AB - 72B^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 20A^2 + 33AB - 36B^2 = 0$$

Chọn B = 1, ta có: $20A^2 + 33A - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = \frac{3}{4} \\ A = -\frac{12}{5} \end{array}\right.$

TH1: B = 1, $A = \frac{3}{4}$, d_3: $\frac{3}{4}x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 4 = 0$ (loại vì $d_1 \equiv$

TH2: B = 1, $A = -\frac{12}{5}$, d_3: $-\frac{12}{5}x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow 12x \quad 5y + 5 = 0.$

Chú ý: Để viết phương trình dường thẳng d_3 đối xứng với d_1 qua d_2 ta thực hiện các bước sau:

* Tìm tọa độ giao điểm I của d_1 và d_2

* Lấy điểm $A \in d_1$, $A \neq I$, ta tìm điểm đối xứng B của A qua d_2

* Viết phương trình dường thẳng IB

* Kết luận đường thẳng d_3 là IB.

BL1: Cho đường thẳng d_1: $3x + 4y - 4 = 0$, d_2: $11x + 3x - 3 = 0$. Viết phương trình dường thẳng d_3 đối xứng với d_1 qua d_2

BL2: Cho tam giác ABC có A(−2; 2) và đường phân giác CD: $x - 2y = 0$ Đường cao BM : $x' - y - 15 = 0$. Hãy viết phương trình các cạnh của tam giác ABC.

Giải:

* Ta viết phương trình AC:

AC qua A và vuông góc với BM nên có:

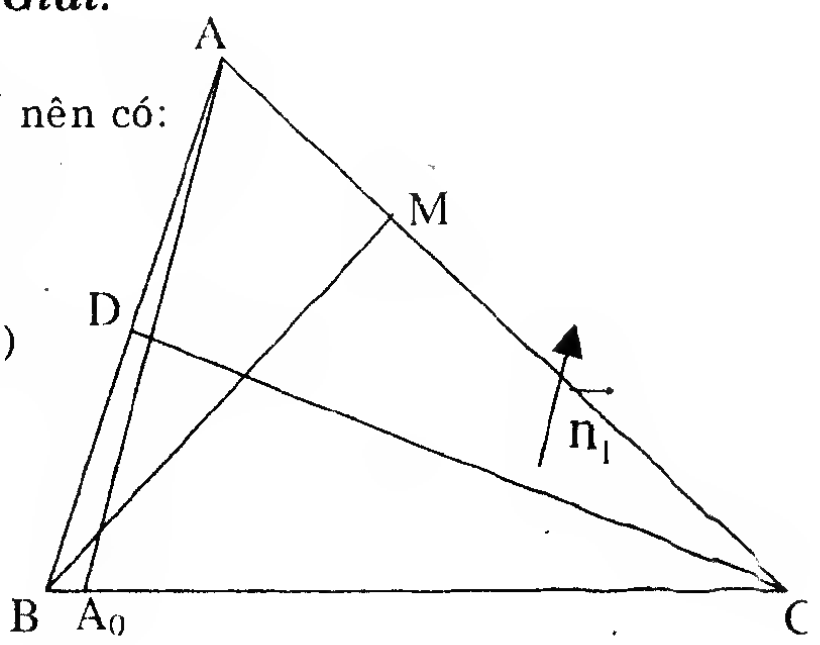
VTPT $\vec{n}(1; 1) \Rightarrow$ AC: $x + y = 0$

Tọa độ của C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(0;0)$$

* Gọi A_0 $(x_0; y_0)$ đối xứng với A qua CD : $\overrightarrow{AA_0} = (x_0 + 2; y_0 - 2)$

CD có VTPT $\vec{n_1}(1;-2)$



Trung điểm N của AA_0 có tọa độ: $(\frac{x_0-2}{2};\frac{y_0+2}{2})$

Ta có: $\overrightarrow{AA_0}$ cùng phương với $\overrightarrow{n_1}$ và $N \in CD \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x_0+2}{1}=\frac{y_0-2}{-2}\\ \frac{x_0-2}{2}-2\frac{y_0+2}{2}=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-2x_0-4=y_0-2\\ x_0-2-2y_0-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x_0+y_0=-2\\ x_0-2y_0=6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_0=\frac{2}{5}\\ y_0=-\frac{14}{5}\end{cases} \Rightarrow A_0(\frac{2}{5};-\frac{14}{5})$

Vì $A_0 \in BC$, nên đường thẳng BC cũng chính là CA_0

$\Rightarrow$ BC: $-\frac{14}{5}(x-0)-\frac{2}{5}(y-0)=0 \Leftrightarrow 7x+y=0$

Tọa độ của B là nghiệm của hệ: $\begin{cases}7x+y=0\\ x-y-15=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{15}{8}\\ y=-\frac{105}{8}\end{cases}$

$\Rightarrow B(\frac{15}{8};-\frac{105}{8}) \Rightarrow$ AB: $(-\frac{105}{8}-2)(x+2)-(\frac{15}{8}+2)(y-2)=0$

$\Leftrightarrow -\frac{121}{8}(x+2)-\frac{31}{8}(y-2)=0 \Leftrightarrow \frac{121}{8}x+\frac{31}{8}y+\frac{45}{2}=0.$

BL3: a. Cho A(1; 1) và trung tuyến BM: $x+2y+1=0$, trung tuyến CN: $x+y+1=0$. Hãy viết phương trình các cạnh của tam giác ABC.

b. Cho A(1; 1) và trung tuyến BM: $x+2y+1=0$, đường phân giác CN: $x+y+1=0$. Hãy viết phương trình các cạnh của tam giác ABC.

BT26: Cho đường thẳng d: $x-y+2=0$ và 2 điểm O(0; 0), A(2; 0)

a. Tìm điểm O' đối xứng với O qua d.

b. Chứng minh rằng A, O nằm cùng một phía đối với d.

c. Tìm trên d điểm M sao cho độ dài đoạn gấp khúc OMA ngắn nhất (SBT)

Giải:

a. Xem BT5. ***ĐS:*** O'(−2; 2).

b. Ta tính: $(x_A-y_A+2)(x_O-y_O+2)=(2-0+2)(0-0+2)=8>0$

Vậy A, O nằm cùng một phía đối với d.

c. Có nhiều cách giải bài toán này.

Vì OA không đổi nên ta chỉ cần tìm $M \in$ d sao cho OM + MA nhỏ nhất

OM + MA = O'M + MA ≥ O'A (Bạn đọc tự vẽ hình)

Vậy OM + MA nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ O', M, A thẳng hàng $\Leftrightarrow$ M là giao điểm của O'A và đường thẳng d

Phương trình đường thẳng O'A: $2x + 4y - 4 = 0$

Tọa độ M là nghiệm của phương trình

$$\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ 2x + 4y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$ Vậy $M(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3})$

Có thể sử dụng vectơ để giải bài toán này

BL1: Cho điểm A(1; 1), B(2; 3) và đường thẳng d: $x + y + 1 = 0$

a. Tìm $M \in d$ sao cho AM + BM nhỏ nhất.

b. Tìm $N \in d$ sao cho $|AN - BN|$ lớn nhất.

HD:

b. A, B cùng phía đối với d, gọi A_0 dối xứng với A qua d

Hãy chứng minh điểm N cần tìm là giao điểm của A_0B với d.

ĐƯỜNG TRÒN

TÓM TẮT LÍ THUYẾT:

1. Phương trình của đường tròn:

a. Phương trình đường tròn tâm I(a; b) bán kính R là $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

b. Nếu $a^2 + b^2 - c > 0$ thì phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ là phương trình của đường tròn tâm O bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn:

* Tiếp tuyến tại điểm $M(x_0; y_0)$ của đường tròn tâm I(a; b) có phương trình: $(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$

* Cho đường tròn (C) tâm I bán kính R

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow$ $d(I; \Delta) = R$.

BÀI TẬP TRONG SÁCH GIÁO KHOA

BT1: Tìm tâm và bán kính của các đường tròn

a. $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$. b. $16x^2 + 16y^2 + 16x - 8y - 11 = 0$.

c. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$.

Giải:

a. *Cách 1:* Phương trình có dạng: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$

Ta có: $a^2 + b^2 - c = 1^2 + 1^2 - (-2) = 4 > 0$

Vậy phương trình trên là phương trình của đường tròn có tâm I(1; 1 và bán kính $R = \sqrt{4} = 2$.

Cách 2: $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$

Vậy phương trình trên là phương trình của đường tròn có tâm I(1; 1) và bán kính $R = \sqrt{4} = 2$.

Chú ý: Để nhận dạng một phương trình là phương trình của đườn tròn và tìm tâm, bán kính của đường tròn này. Ta có thể sử dụng cách sau:

Cách 1:

* Biến dổi phương trình về dạng: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (1)

* Kiểm tra diều kiện: $a^2 + b^2 - c > 0$

* Nếu thỏa điều kiện trên thì (1) là phương trình của đường tròn c tâm I(a; b) và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

Cách 2:

* Biến đổi phương trình về dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 = m$ (2)

* Nếu $m > 0$, thì (2) là phương trình của đường tròn tâm I(a; b) v bán kính $R = \sqrt{m}$.

b. Chia hai vế cho 16, sau đó áp dụng phương pháp đã nêu trên.

c. Giải tương tự.

BT2: Lập phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp.

a. (C) có tâm I(−1; 2) và tiếp xúc với đường thẳng Δ: $x - 2y + 7 = 0$.

b. (C) có đường kính AB với A(1; 1), B(7; 5).

HD: Ta có 2 cách cơ bản để viết phương trình đường tròn

Cách 1:

* Tìm tâm I(a; b) và bán kính R của đường tròn

* Viết phương trình theo dạng : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

Cách 2:

* Gọi đường tròn (C) có phương trình dạng: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c =$

* Ta tìm a, b, c, bằng cách lập hệ phương trình (thông thường là gồ 3 phương trình) 3 ẩn a, b, c. Chú ý các tính chất thường sử dụng sau:

+ (C) di qua A, B $\Leftrightarrow IA^2 = IB^2$

+ Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow d(I; \Delta) = R$ (I, R lầ lượt là tâm và bán kính của (C)

+ (C) đi qua A và tiếp xúc với Δ $\Leftrightarrow IA = d(I; \Delta)$

+ (C) tiếp xúc với Δ_1 và $\Delta_2 \Leftrightarrow d(I; \Delta_1) = d(I; \Delta_2)$

Đặc biệt (C) có tâm I(a; b) và tiếp xúc với 2 trục tọa độ $\Leftrightarrow |a| = |b|$

Giải:

a. Biết tâm I ta tìm bán kính R của (C) (sử dụng cách 1)

Ta có: $R = d(I; \Delta) = \dfrac{|-1-2.2+7|}{\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow R^2 = \dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow$ (C) có phương trình: $(x+1)^2 + (y-2)^2 = \dfrac{4}{5}$.

b. Gọi $I(x_I; y_I)$ là tâm của đường tròn $\Rightarrow$ I là trung điểm của AB

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = 4 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow I(4; 3)$$

Gọi R là bán kính của (C)$\Rightarrow R = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{\sqrt{52}}{2} \Rightarrow R^2 = \dfrac{52}{4} = 13$

$\Rightarrow$ (C): $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 13$.

Có thể giải cách khác như sau: Gọi M(x; y) với A(1; 1), B(7; 5)

$M \in (C) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-7) + (y-1)(y-5) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x - 6y + 12 = 0.$

BL: Viết phương trình đường tròn đường kính AB với $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$.

BT3: Lập phương trình đi qua 3 điểm

a. A(1; 2), B(5; 2), C(1; −3). b. M(−2; 4), N(5; 5), P(6; 2).

Giải:

Ta sử dụng cách 2:

a. Gọi (C): $x^2 + y^2$ 2ax 2by + c = 0

Vì A, B, C $\in$ (C) ta có:

$$\begin{cases} 1^2 + 2^2 - 2a1 - 2b2 + c = 0 \\ 5^2 + 2^2 - 2a5 - 2b2 + c = 0 \\ 1^2 + (-3)^2 - 2a1 - 2b(-3) + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a - 4b + c = -5 \\ -10a - 4b + c = -29 \\ -2a + 6b + c = -10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -\dfrac{1}{2} \\ c = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ (C): $x^2 + y^2 - 6x + y - 1 = 0$.

b. Giải tương tự : (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

BT4: Lập phương trình đường tròn tiếp xúc với 2 trục tọa độ Ox và Oy à đi qua điểm M(2; 1)

HD: Ta chỉ cần tìm tâm I(a; b) (vì khi đã biết I thì bán kính R hoàn t
xác định R = IA) bài toán có 2 ẩn, ta chỉ cần lập hệ gồm 2 phương tr
ẩn a, b.

Giải:

Gọi I (a; b) là tâm của đường tròn (C)

(C) tiếp xúc với Ox và Oy và đi quA

$\Leftrightarrow$ d(I; Ox) = d(I; Oy) = IM

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |a| = |b| \\ [d(I;Ox)]^2 = IM^2 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -b \end{array}\right. \\ a^2 = (a-2)^2 + (b-1)^2 \quad (1) \end{cases}$$

TH1 : a = b thế vào (1) ta có: $a^2 = (a-2)^2 + (a-1)^2$

$$\Leftrightarrow a^2 - 6a + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 5 \end{array}\right.$$

* a = b = 1 Ta có: I(1; 1) và $R^2 = IA^2 = 1 \Rightarrow$ (C): $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

* a = b = 5 Ta có: I(5; 5) và $R^2 = IA^2 = 25 \Rightarrow$ (C): $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ (

TH2: a = −b thế vào (1) ta có: $a^2 = (a-2)^2 + (-a-1)^2$

$\Leftrightarrow a^2 - 2a + 5 = 0$ vô nghiệm

Vậy có 2 đường tròn (C) có phương trình là (1) và (2)

Chú ý: Hệ dạng $\begin{cases} A \\ \left[\begin{array}{l} B \\ C \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} A \\ B \end{cases} \\ \begin{cases} A \\ C \end{cases} \end{array}\right.$

BL1: Lập phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành Ox đường thẳng y = 2 và đi qua điểm M(2; 2).

HD: (C) có tâm I thuộc đường thẳng y = 1 và bán kính R = 1 $\Rightarrow$ I(a bài toán có 1 ẩn a, giải phương trình $IM^2 = 1$ ta có giá trị của a.

BL2: Lập phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục Ox, có bán k bằng 1, có tâm I trên đường thẳng d: x + y − 3 = 0

HD: Gọi I(a; b), ta lập hệ phương trình 2 ẩn a, b bằng cách dựa vào thiết I $\in$ d và d(I; Ox) = R

Ta đi đến giải hệ: $\begin{cases} |b| = 1 \\ a + b - 3 = 0 \end{cases}$

BT5: Lập phương trình đường tròn tiếp xúc với 2 trục tọa độ và có tâm huộc đường thẳng d: $4x - 2y - 8 = 0$.

HD: Ta chỉ cần tìm tâm I(a; b) của đường tròn (C), và khi đó $R = |a|$, ta ập hệ phương trình 2 ẩn a, b.

Giải:

Gọi I(a; b) là tâm của đường tròn (C) nói ở đề bài, ta có:

$$\begin{cases} d(I,Ox) = d(I,Oy) \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| = |b| \\ 4a - 2b - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = -b \end{array}\right. \\ 4a - 2b - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b \\ 4a - 2b - 8 = 0 \end{cases} \quad (I) \\ \begin{cases} a = -b \\ 4a - 2b - 8 = 0 \end{cases} \quad (II) \end{array}\right.$$

* Giải (I)

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 4a - 2b - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 4a - 2a - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 4$$

$$\Rightarrow I(4; 4),\ R = |a| = 4 \Rightarrow (C): (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 16 \qquad (1)$$

* Giải (II)

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ 4a - 2b - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ 4a + 2a - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{4}{3} \\ b = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I\left(\frac{4}{3}; -\frac{4}{3}\right);\ R = |a| = \frac{4}{3} \Rightarrow (C): \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9} \qquad (2)$$

Vậy có 2 đường tròn có phương trình (1), (2).

BT6: Lập phương trình đường tròn có tâm trên đường thẳng Δ:

$$4x + 3y - 2 = 0$$

à tiếp xúc với 2 đường thẳng d: $x + y + 4 = 0$, d': $7x - y + 4 = 0$

HD: Ta chỉ cần xác định tâm I(a, b) của đường tròn, bằng cách lập hệ ồm 2 phương trình 2 ẩn a, b dựa vào 2 giả thiết sau:

$I \in \Delta$ (Tọa độ của I thỏa mãn phương trình của Δ).

(C) tiếp xúc với d và d' (khoảng cách từ I đến d bằng khoảng cách từ I ến d').

Giải:

Gọi I(a; b) là tâm của đường tròn (C) nói ở đề bài. Theo giả thiết ta có:

$$\begin{cases} I \in \Delta \\ d(I,d) = d(I,d') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+3b-2=0 \\ \dfrac{|a+b+4|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|7a-b+4|}{\sqrt{50}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+3b-2=0 \\ |a+b+4| = \dfrac{|7a-b+4|}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a+3b-2=0 \\ |7a-b+4| = 5|a+b+4| \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4a+3b-2=0 \\ 7a-b+4 = 5a+5b+20 \end{cases} \quad (I) \\ \begin{cases} 4a+3b-2=0 \\ 7a-b+4 = -5a-5b-20 \end{cases} \quad (II) \end{array}\right.$$

* Giải (I) :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+3b-2=0 \\ 2a-6b-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow I(2;\ -2)$$

Gọi R là bán kính của (C) ta có:

$$R = d(I,\ d) = \frac{|2-2+4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \Rightarrow R^2 = \frac{16}{2} = 8$$

$\Rightarrow (C) : (x-2)^2 + (y+2)^2 = 8 \quad (1)$

* Giải (II)

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+3b-2=0 \\ 12a+4b+24=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=6 \end{cases} \Rightarrow I(-4;\ 6)$$

$$\Rightarrow R = \frac{|-4+6+4|}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} \Rightarrow (C): (x+4)^2 + (y-6)^2 = 18 \quad (2)$$

Vậy có 2 đường tròn có phương trình (1), (2.

BT7: Cho 2 điểm A(1; 1), B(9; 7).

a. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 = 90$.

b. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $2MA^2 - 3MB^2 = 200$.

HD: Gọi M(x, y). Tính MA^2 và MB^2 sao đó thế vào đẳng thức đã cho đề bài ta thu được biểu thức liên hệ x, y, đó chính là phương trình tậ hợp các điểm M.

Giải:

a. Gọi M(x, y), ta có: $MA^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y +$

$MB^2 = (x-9)^2 + (y-7)^2 = x^2 + y^2 - 18x - 14y + 13$

$MA^2 + MB^2 = 90$

$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2) + (x^2 + y^2 - 18x - 14y + 130) = 90$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 - 20x - 16y + 42 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10x - 8y + 21 = 0$ (

Phương trình (*) có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

với $a^2 + b^2 - c = 25 + 16 - 21 = 20 >$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn có phương trình (*)

b. Giải tương tự.

BL1: Cho 2 điểm A(1; 1), B(9; 7).

a. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2 - MB^2 = 90$.

b. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2 - 2MB^2 = 90$.

ĐS: a. Là đường thẳng; b. Là đường tròn.

BL2: Cho tam giác ABC với A(1; 2), B(5; 2), C(1; −3). Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn:

a. $MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = 90$. b. $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 90$.

ĐS: a. Là đường tròn. b. Là đường thẳng.

BT8: Cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$

a. Tìm tọa độ tâm và bán kính của (C).

b. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm A(−1; 0).

c. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) đi qua điểm B(10; 1).

d. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) vuông góc với đường thẳng $3x - 4y + 5 = 0$.

Giải:

a. Phương trình $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$ có dạng:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \text{ với } a = 2,\ b = -4,\ c = -5$$

Ta có: $a^2 + b^2 - c = 4 + 16 + 5 = 25 > 0$

Vậy (C) có tâm I(2; −4) và có bán kính R = 5.

b. Nhận xét rằng tọa độ điểm A thỏa mãn phương trình của (C) vậy $A \in (C)$

Vậy tiếp tuyến của (C) đi qua điểm A(−1; 0) cũng là tiếp tuyến tại điểm A vì vậy có phương trình:

$$(-1-2)(x+1) + (0+4)(y-0) = 0 \Leftrightarrow -3x + 4y - 3 = 0.$$

c. Điểm B có tọa độ không thỏa mãn phương trình của (C) vậy $B \notin (C)$

Đường thẳng (d) đi qua điểm B(10; 1) có phương trình dạng :

$$a(x-10) + b(y-1) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 10a - b = 0 \qquad (a^2 + b^2 > 0)$$

(d) là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow d(I, d) = R \Leftrightarrow \dfrac{|2a - 4b - 10a - b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 5$

$$\Leftrightarrow |8a + 5b| = 5\sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow (8a + 5b)^2 = 25(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow 64a^2 + 80ab + 25b^2 = 25a^2 + 25b^2$$

$$\Leftrightarrow 39a^2 + 80ab = 0 \Leftrightarrow a(39a + 80b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ 39a + 80b = 0 \end{array}\right.$$

* $a = 0 \Rightarrow b \neq 0$ chọn b = 1 ta có: đ: $y - 1 = 0$ (1)

* $39a + 80b = 0$ Nếu $a = 0 \Rightarrow b = 0$ (không thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 > 0$)

Vậy $a \neq 0$, chọn a = 80, b = −39, ta có: d: $80x - 39y - 761 = 0$ (2)

Vậy có 2 tiếp tuyến d có phương trình (1), (2).

Chú ý: Để viết phương trình đường thẳng đ đi qua điểm M và tiếp xúc với đường tròn (C) ta thực hiện các bước:

+ Kiểm tra vị trí tương đối của điểm M đối với đường tròn (C) bằng cách tính phương tích của điểm A đối với (C) $P^{M}/_{(C)}$.

+ Nếu $P^{M}/_{(C)} < 0$ thì điểm M ở trong đường tròn: Không có tiếp tuyến nào.

+ Nếu $P^{M}/_{(C)} = 0$ thì điểm M ở trên đường tròn: Có 1 tiếp tuyến.

Trong trường hợp này ta viết phương trình tiếp tuyến tại điểm M bằng công thức:

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$$

+ Nếu $P^{M}/_{(C)} > 0$ thì điểm M ở ngoài đường tròn: Có 2 tiếp tuyến.

Ta viết phương trình đường thẳng d đi qua M: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ $(A^2 + B^2 > 0)$ d là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow$ đ(I, đ) = R (*)

I, R lần lượt là tâm và bán kính của (C).

Giải:

(*) ta tính được A, B. Chú ý rằng (*) thường là phương trình thuần nhất đẳng cấp bậc hai 2 ẩn A, B, ta chọn A tính B hoặc chọn B tính A, chú ý rằng $A^2 + B^2 > 0$.

d. Đường thẳng đ vuông góc với đường thẳng $3x - 4y + 5 = 0$ có phương trình: $4x + 3y + C = 0$

$$\text{d là tiếp tuyến của (C)} \Leftrightarrow đ(I, đ) = R \Leftrightarrow \frac{|4.2 + 3(-4) + C|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 5$$

$$\Leftrightarrow |-4 + C| = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} C - 4 = 25 \\ C - 4 = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 29 \\ C = -21 \end{cases}$$

Vậy có 2 tiếp tuyến đ thỏa đề bài: $4x + 3y + 29 = 0$; $4x + 3y - 21 = 0$.

Chú ý: Cho đường thẳng d_1: $Ax + By + C = 0$

* Đường thẳng d_2 vuông góc với $đ_1$ có phương trình: $Bx - Ay + C_1 = 0$

* Đường thẳng $đ_2$ song song với $đ_1$ có phương trình: $Ax + By + C_1 = 0$ $(C_1 \neq C)$.

BL1: Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 3y = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) đi qua M(−3; −1).

ĐS: $y = 1$ và $4x - 3y + 9 = 0$.

BL2: Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ và đường thẳng Δ: $2x + y + 4 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến ấy song song với Δ. Tính tọa độ tiếp điểm.

DS: $2x + y = 0$; $2x + y - 10 = 0$, 2 tiếp điểm tương ứng là (1; 2) và (5; 0).

BT9: Cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$ và điểm $M(x_0; y_0)$. Tính phương tích của điểm M đối với đường tròn.

HD: Sử dụng công thức: $P_{M/(C)} = IM^2 - R^2$.

Giải:

(C) có tâm $I(-A; -B)$ và có bán kính $R = \sqrt{A^2 + B^2 - C}$

$$P_{M/(C)} = IM^2 - R^2 = (x_0 + A)^2 + (y_0 + B)^2 - (A^2 + B^2 - C)$$

$$= x_0^2 + 2Ax_0 + A^2 + y_0^2 + 2By_0 + B^2 - A^2 - B^2 + C$$

$$= x_0^2 + y_0^2 + 2Ax_0 + 2By_0 + C$$

Chú ý: Để tìm phương tích của một điểm M đối với đường tròn, ta biến đổi phương trình đường tròn về dạng $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$, sau đó thay tọa độ của M vào vế trái của phương trình này ta được giá trị của phương tích

BL1: Cho điểm M(m, 2) và đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$

Biện luận theo m số tiếp tuyến kẻ từ M tới (C)

HD: Sử dụng chú ý ở bài 9 và chú ý ở bài 8

BT10: Trong mặt phẳng Oxy cho A(0; 3), B(4; 0). Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB

HD: Để tìm tâm nội tiếp I của tam giác ABC ... có các cách sau

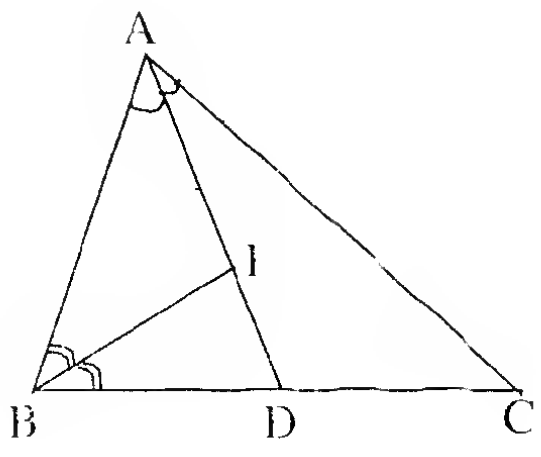
Cách 1: Dựa vào định nghĩa: Tâm đường tròn nội tiếp là giao điểm của 2 đường phân giác trong của tam giác đó. Ta viết phương trình 2 đường phân giác trong, sau đó tìm tọa độ giao điểm

Cách 2: D là chân đường phân giác trong AD của tam giác ABC

Ta có : $\overrightarrow{DB} = -\frac{AB}{AC}\overrightarrow{DC}$

I là chân đường phân giác trong BI của tam giác ABD

Ta có $\overrightarrow{IA} = -\frac{BA}{BD}\overrightarrow{ID}$.

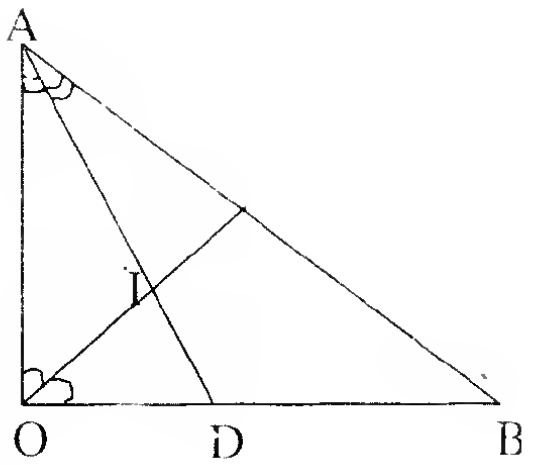


Cách 3: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} d(I;AB) = d(I;AC) \\ d(I;AB) = d(I;BC) \end{cases}$$

Trừ một vài dạng đặc biệt, còn nói chung phương pháp này lời giải dài, vì hệ phương trình trên có 4 nghiệm, ta phải loại bỏ 3 nghiệm.

Giải:



Cách 1:

Đường phân giác trong của góc O là đường phân giác của góc phần tư thứ nhất do vậy có phương trình $y = x \Leftrightarrow x - y = 0$

Ta viết phương trình đường phân giác trong AD của góc A của tam giác OAB (xem BT3 phần đường thẳng)

$\overrightarrow{AO} = (0; -3)$; $\overrightarrow{AB} = (4; -3)$; $AB = 5$; $AO = 3$

Lấy điểm $M(x; y)$ ta có: $\overrightarrow{AM} = (x; y-3)$

$M \neq A$ và $M \in AD \Leftrightarrow (\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM})$

$$\Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AM}) = \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AM}}{AO.AM} = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}}{AB.AM} \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AM}}{AO} = \frac{\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AM}}{AB}$$

$$\Leftrightarrow \frac{0x - 3(y-3)}{3} = \frac{4x - 3(y-3)}{5}$$

$$\Leftrightarrow -5(y-3) = 4x - 3y + 9 \Leftrightarrow 4x + 2y - 6 = 0$$

Tọa độ tâm đường tròn nội tiếp I là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 4x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow I(1; 1)$$

Gọi r là bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác OAB ta có:

$$r = d(I; OA) = 1$$

Vậy phương trình của đường tròn này là $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

Cách 2: Ta có $AB = 5$; $AO = 3$

Gọi $D(x_0; y_0)$ là chân đường phân giác trong AD ta có:

$$\overrightarrow{DO} = -\frac{AO}{AB}\overrightarrow{DB} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{DB} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x_0 = -\frac{12}{5} + \frac{3}{5}x_0 \\ -y_0 = \frac{3}{5}y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x_0 = 12 \\ y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{3}{2} \\ y_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow D(\frac{3}{2}, 0) \Rightarrow OD = \frac{3}{2}$$

Ta có OI là đường phân giác trong của góc O của tam giác AOD. Gọi $I(x_1; y_1)$ ta có: $\overrightarrow{IA} = -\frac{OA}{OD}\overrightarrow{ID} = -2\overrightarrow{ID} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 - x_1 = -2(\frac{3}{2} - x_1) \\ 3 - y_1 = -2(0 - y_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 1 \end{cases}$

Cách 3: Dựa vào tính chất hình học đặc thù của bài toán:

AB: $(0 - 3)(x - 0) - (4 - 0)(y - 3) = 0 \Leftrightarrow -3x - 4y + 12 = 0$

Vì tam giác AOB vuông tại O nên I thuộc đường phân giác trong của góc O của tam giác OAB, có nghĩa là nằm trên phân giác của góc phần tư thứ nhất vì vậy I(a; a), dễ thấy rằng $0 < a < 3$

Ta có: $d(I; AB) = d(I; Ox) \Leftrightarrow |a| = \dfrac{|-3a - 4a + 12|}{5} \Leftrightarrow 5a = |12 - 7a|$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5a = 12 - 7a \\ 5a = 7a - 12 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a = 1 \\ a = 6 \end{bmatrix} \Rightarrow a = 1.$$

BÀI TẬP BỔ SUNG

BT11: Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ và điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (C). Chứng minh rằng tiếp tuyến d với (C) tại điểm M có dạng:

$$x_0x + y_0y - a(x_0 + x) - b(y_0 + y) + c = 0.$$

HD: Xuất phát từ công thức $(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$. Với chú ý rằng $x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + c = 0$. Công thức thường được gọi là "qui tắc phân đôi".

BL: Cho (C): $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C

a. Tại điểm M(1; 4). b. Tại điểm N có tung độ bằng 1.

BT12: Cho 3 đường thẳng: Δ_1: $3x + 4y - 1 = 0$; Δ_2: $4x + 3y - 8 = 0$;

$$d: 2x + y - 1 = 0$$

a. Lập phương trình các đường phân giác của góc hợp bởi Δ_1 và Δ_2.

b. Xác định tọa độ tâm I của đường tròn (C) biết rằng I nằm trên d và (C) tiếp xúc với Δ_1 và Δ_2.

c. Viết phương trình của (C).

Giải:

a. Phương trình các đường phân giác của góc hợp bởi Δ_1 và Δ_2

$$\frac{|3x + 4y - 1|}{5} = \frac{|4x + 3y - 8|}{5} \Leftrightarrow |3x + 4y - 1| = |4x + 3y - 8|$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 3x + 4y - 1 = 4x + 3y - 8 \\ 3x + 4y - 1 = -4x - 3y + 8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x - y - 7 = 0 & (1) \\ 7x + 7y - 9 = 0 & (2) \end{bmatrix}$$

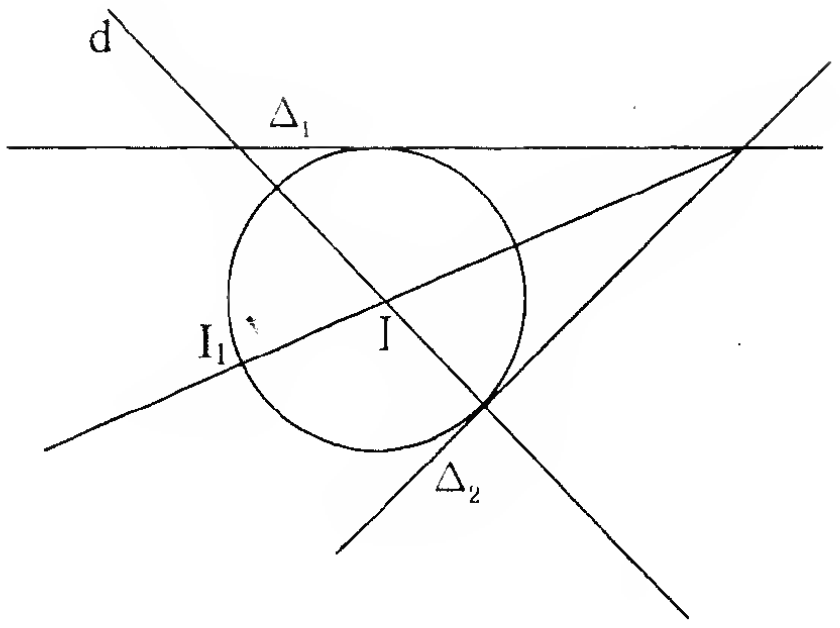
Vậy các đường phân giác l_1, l_2 lần lượt có phương trình là (1) và (2)

b. I phải thuộc đường phân giác của góc hợp bởi Δ_1 và Δ_2

TH1: $I \in l_1$

Vì I∈d, và vậy ta có hệ $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - y - 7 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ y = -\frac{13}{3} \end{cases} \Rightarrow I_1(\frac{8}{3}; -\frac{13}{3})$$



TH2: $I \in l_2$

Vì I∈d ta có hệ

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ 7x + 7y - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{7} \\ y = \frac{11}{7} \end{cases} \Rightarrow I_2(-\frac{2}{7}; \frac{11}{7})$$

c. Để viết phương trình của (C) ta tính bán kính tương ứng cho mỗi trường hợp. Gọi R là bán kính của (C)

TH1: $I_1(\frac{8}{3}; -\frac{13}{3})$

$$R = d(I_1; \Delta_1) = \frac{\left|3.\frac{8}{3} + 4(-\frac{13}{3}) - 1\right|}{5} = \frac{31}{15}$$

$$\Rightarrow (C): \left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{13}{3}\right)^2 = \left(\frac{31}{15}\right)^2$$

TH2: $I_2\left(-\frac{2}{7}; \frac{11}{7}\right)$ giải tương tự (C): $\left(x + \frac{2}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{7}\right)^2 = \left(\frac{31}{35}\right)^2$.

BL1: Viết phương trình đường tròn qua điểm A(1; 3) và tiếp xúc với 2 đường thẳng d_1: x + 2y + 2 = 0 và d_2: 2x − y + 9 = 0

HD và ***ĐS :***

Gọi I(a; b) ta tìm tọa độ của I bằng cách giải hệ: $\begin{cases} d(I; d_1) = d(I, d_2) \\ d(I, d_1) = IA \end{cases}$

ĐS : $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$; $\left(x - \frac{67}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{34}{5}\right)^2 = \frac{841}{5}$.

BL2: Viết phương trình đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng d:

$$x + y - 5 = 0, \text{ có bán kính } R = \sqrt{10}$$

và tiếp xúc với đường thẳng d_1: 3x + y − 3 = 0

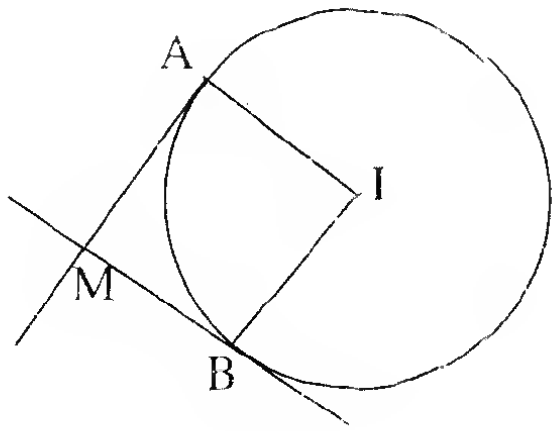
ĐS : $(x-4)^2 + (y-1)^2 = 0$; $(x+6)^2 + (y-11)^2 = 10$.

BT13: Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$

a. Định tâm và bán kính đường tròn.

b. Tìm tập những điểm M mà từ M kẻ được 2 tiếp tuyến vuông góc lến (C).

Giải:



a. ***ĐS:*** Tâm I(1; 1) bán kính R = 3

b. Giả sử từ M kẻ 2 tiếp tuyến vuông góc lến (C) và A, B là tiếp điểm tương ứng

Tứ giác MAIB có 3 góc vuông

$\widehat{AMB} = 90^0$ (giả thiết)

$\widehat{IAM} = \widehat{IBM} = 90^0$(bán kính vuông góc với tiếp tuyến tại tiếp điểm)

$\Rightarrow$ MAIB là hình chữ nhật. Lại do IA = IB =R

$\Rightarrow$ MAIB là hình vuông

$\Rightarrow MI = IA\sqrt{2} = R\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

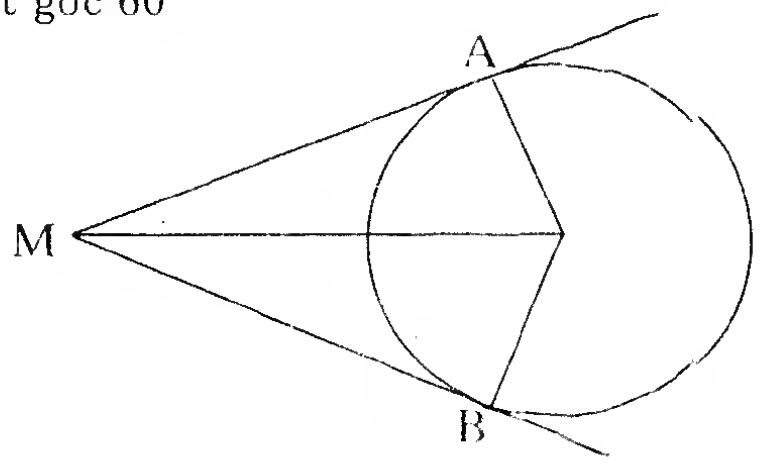
M cách I cố định một khoảng không đổi $3\sqrt{2}$ nên M thuộc đường tròn C_1) tâm I đường kính $R_1 = 3\sqrt{2}$, và vì vậy: (C_1): $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 18$.

BL: Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$

a Định tâm và bán kính đường tròn.

b. Tìm tập những điểm M mà từ M kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C) sao ho 2 tiếp tuyến này tạo với nhau một góc 60^0

ID:



Xét 2 trường hợp:

TH1: $\widehat{AMB} = 60^0$

TH2: $\widehat{AMB} = 120^0$.

Trong mỗi trường hợp hãy tính)M theo R bán kính của (C)

BT14: Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 16$ và đường thẳng l : x + y = 0

a. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm M(4; 3) sao cho Δ cắt C) tại 2 điểm A, B sao cho AB = 2.

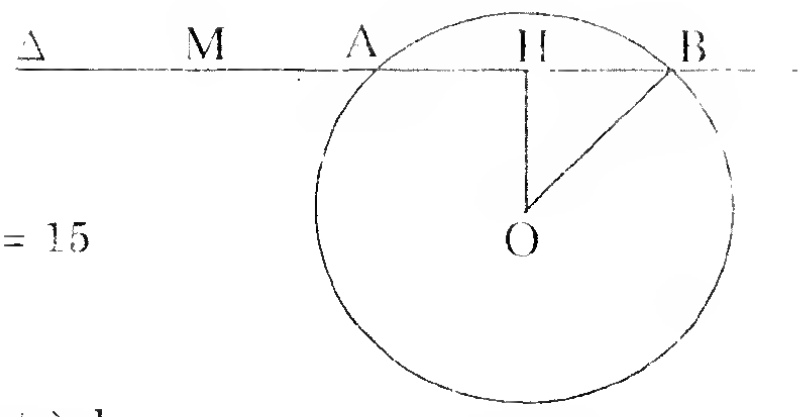
b. Viết phương trình đường thẳng d // l và d cắt (C) tại 2 điểm A, B ao cho AB = 2.

Giải:

a. (C) có tâm O(0; 0) và có bán kính R = 4

Gọi H là trung điểm của AB, ta có: OH $\perp$ AB

Áp dụng định lí Pitagor cho tam giác vuông OHA ta có:



$$OH^2 = OA^2 - HA^2$$

$$= R^2 - \left(\left(\frac{AB}{2}\right)^2\right)^2 = 16 - 1 = 15$$

$$\Rightarrow OH = \sqrt{15}$$

Δ qua M(4; 3) nên có phương trình :

$$a(x-4) + b(y-3) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 4a - 3b = 0 \quad (a^2 + b^2 > 0)$$

$OH = \sqrt{15} \Rightarrow$ O cách Δ một khoảng $\sqrt{15}$, ta có:

$$d(O, \Delta) = \sqrt{15} \Leftrightarrow \frac{|-4a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{15} \Leftrightarrow |4a+3b| = \sqrt{15}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow 16a^2 + 24ab + 9b^2 = 15a^2 + 15b^2 \Leftrightarrow a^2 + 24ab - 6b^2 = 0$$

Chọn b = 1 ta có: $a^2 + 24a - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -12 - 5\sqrt{6} \\ a = -12 + 5\sqrt{6}. \end{array}\right.$

Vậy có 2 đường thẳng Δ có phương trình:

$$-(12 + 5\sqrt{6})x + y + 45 + 20\sqrt{6} = 0$$

$$-12 + 5\sqrt{6})x + y + 45 - 20\sqrt{6} = 0$$

b. Đường thẳng d song song với l nên có phương trình: $x + y + C = 0$ $(C \neq 0)$

Tương tự như câu a khoảng cách từ O đến d bằng $\sqrt{15}$ ta có:

$$d(O, d) = \sqrt{15} \Leftrightarrow \frac{|C|}{\sqrt{2}} = \sqrt{15} \Leftrightarrow |C| = \sqrt{30} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C = \sqrt{30} \\ C = -\sqrt{30} \end{array}\right.$$

Vậy có 2 đường thẳng d có phương trình:

$$x + y + \sqrt{30} = 0; \quad x + y - \sqrt{30} = 0$$

BL: Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 14 = 0$ và đường thẳng d: $x - 2y + 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng vuông góc với d và cắt (C) tại 2 điểm A, B sao cho AB = 2.

Bl 15. Cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 = 16$

a. Cho A(4; 2). Tìm điểm M thuộc đường tròn (C) sao cho

i. MA nhỏ nhất

ii. MA lớn nhất.

b. Tìm điểm N thuộc đường tròn (C) sao cho khoảng cách từ N đến đường thẳng d: $x + y = 8$ là nhỏ nhất.

Giải:

a. (C) có tâm O(0; 0) và bán kính R = 4

i. (C): $x^2 + y^2 = 16 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 16 = 0 \Rightarrow P_{A/(C)} = 4^2 + 2^2 - 16 = 4 > 0$

$\Rightarrow$ A ngoài đường tròn (C)

Với mọi $M_0 \in (C)$. Gọi M là giao điểm của OA và (C) và M nằm giữa O, A

Ta có: $AM_0 + M_0O \geq OA = OM + MA$ (*)

Mặt khác $OM = M_0O = R$

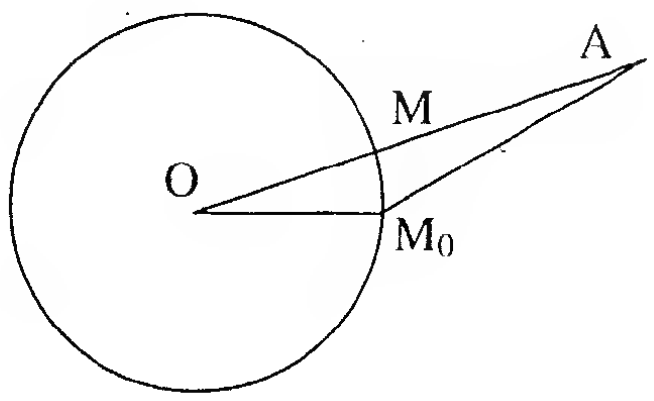
Vậy (*) $\Leftrightarrow AM_0 \geq MA$

Vậy điểm M cần tìm là giao điểm của đoạn OA và (C)

OA: $2x - 4y = 0 \Leftrightarrow x - 2y = 0$

Xét hệ: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y^2 = 16 \\ x = 2y \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} y = \dfrac{4}{\sqrt{5}} \\ x = \dfrac{8}{\sqrt{5}} \end{cases} \right. \quad \left. \begin{cases} y = -\dfrac{4}{\sqrt{5}} \\ x = -\dfrac{8}{\sqrt{5}} \end{cases}\right.$$



M phải có hoành độ dương nên $M\left(\dfrac{8}{\sqrt{5}}; \dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)$.

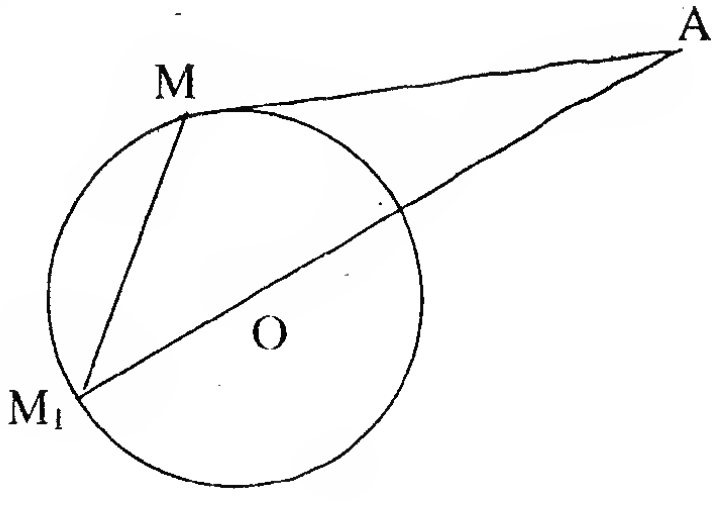
ii. Gọi M_1 là giao điểm của OA với (C), M_1 ngoài đoạn. Ta có:

$AM \leq MO + AO = OM_1 + AO = AM_1$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv M_1$

Giải tương tự như câu I ta có:

$M_1\left(-\dfrac{8}{\sqrt{5}}; -\dfrac{4}{\sqrt{5}}\right)$;).



b. Có 2 cách để giải bài toán này:

Cách 1: Phương pháp hình học

Xét vị trí tương đối của (C) và d

$D(O; d) = \dfrac{8}{\sqrt{2}} > R$

$\Rightarrow$ d nằm ngoài (C) (đ và (C) không có điểm chung

Gọi Δ là đường thẳng song song với d và là tiếp tuyến của (C), Gọi 2 tiếp điểm tương ứng là A,B điểm M cần tìm là một trong 2 điểm A, B

Ta có: $OA \perp \Delta \Rightarrow OA \perp d$

Đường thẳng OA di qua O và vuông góc với d nên

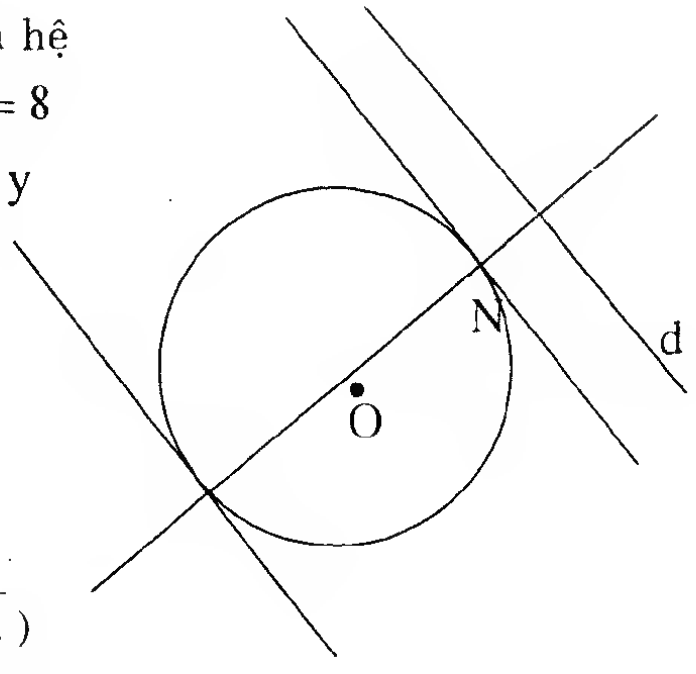
OA có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -1)$

$\Rightarrow$ OA: $x - y = 0$

Vậy tọa độ của A, B là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 = 16 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 8 \\ x = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{cases} y = 2\sqrt{2} \\ x = 2\sqrt{2} \end{cases} \right. \left. \begin{cases} y = -2\sqrt{2} \\ x = -2\sqrt{2} \end{cases}\right.$$



$\Rightarrow$ $A(2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$; $B(-2\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$

$$d(A; d) = \frac{|2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 8|}{\sqrt{2}} = \frac{8 - 4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$d(B; d) = \frac{|-2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - 8|}{\sqrt{2}} = \frac{8 + 4\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$d(A; d) < d(B; d)$

Vậy N có tọa độ $(2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$.

Chú ý rằng điểm N thuộc (E) sao cho khoảng cách tới d lớn nhất có tọa độ $(2\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$.

Bạn đọc tham khảo thêm phương pháp giải tích dưới đây.

Cách 2:

Gọi $N(x; y) \in (C)$, ta có: $x^2 + y^2 = 16$

$$(N; d) = \frac{|x + y - 8|}{\sqrt{2}}; \quad d(N; d) \text{ bé nhất} \Leftrightarrow |x + y - 8| \text{ bé nhất}$$

Sử dụng bất đẳng thức: $(ab + cd)^2 \le (a^2 + c^2)(b^2 + d^2)$ (SGK Đại số)

$$\Rightarrow -\sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)} \le |ab + cd| \le \sqrt{(a^2 + c^2)(b^2 + d^2)}$$

Vì $|x + y| = |1.x + 1.y|$

Sử dụng (*) ta có:

$$-\sqrt{(1^2 + 1^2)(x^2 + y^2)} \le |x + y| \le \sqrt{(1^2 + 1^2)(x^2 + y^2)}$$

$$\Leftrightarrow -4\sqrt{2} \le |x + y| \le 4\sqrt{2} \Rightarrow |x + y - 8| \ge 8 - 4\sqrt{2}$$

Dấu bằng đạt tại $x = y = 2\sqrt{2}$

Vậy $N(2\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$.

BL: Cho đường tròn (C): $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$

a. Cho A(4; 2). Tìm điểm M thuộc đường tròn (C) sao cho

i. MA nhỏ nhất

ii. MA lớn nhất.

b. Tìm điểm N thuộc đường tròn (C) sao cho khoảng cách từ N đến đường thẳng d: $x + y = 15$ là nhỏ nhất.

BT16: Xét vị trí tương đối của đường thẳng d: $4x - y - 5 = 0$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + \frac{4}{5} = 0$.

HD: Cho đường thẳng Δ và đường tròn (C) có tâm I và bán kính R. Gọi $d(I; \Delta)$ là khoảng cách từ I đến Δ

* Nếu $d(I; \Delta) > R$: Δ và (C) không có điểm chung (Δ ngoài (C))
* Nếu $d(I; \Delta) = R$: Δ tiếp xúc với (C)
* Nếu $d(I; \Delta) < R$: Δ cắt (C) tại 2 điểm phân biệt.

Giải:

(C) có tâm I(1; 0) và bán kính $R = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$d(I; \Delta) = \frac{|4.1 - 0 - 5|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$\Rightarrow d(I; \Delta) < R$. Vậy Δ cắt (C)

BL1: Xác định m để đường thẳng Δ: $mx - y - 2m + 3 = 0$ và đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + \frac{4}{5} = 0$:

a. Không có điểm chung b. Cắt nhau c. Tiếp xúc nhau.

Giải:

(C) có tâm I(1; 0) và bán kính $R = \frac{1}{\sqrt{5}}$. $d(I; \Delta) = \frac{|m-3|}{\sqrt{m^2+1}}$

a. Δ và (C) không có điểm chung $\Leftrightarrow \frac{|m-3|}{\sqrt{m^2+1}} > \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5}\,|m-3| > \sqrt{m^2+1} \Leftrightarrow 4m^2 - 30m + 44 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 2 \\ m > \frac{11}{2} \end{array}\right.$$

b. Δ và (C) cắt nhau $\Leftrightarrow \dfrac{|m-3|}{\sqrt{m^2+1}} < \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow 2 < m < \dfrac{11}{2}$

c. Δ và (C) tiếp xúc nhau $\Leftrightarrow \dfrac{|m-3|}{\sqrt{m^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 2 \\ m = \dfrac{11}{2} \end{array}\right.$.

BT17: Cho điểm A(−2; 1) và B(3; 5) và đường tròn

(C): $x^2 + y^2 - 2mx + y - 1 = 0$. Định m để đoạn thẳng AB cắt (C) tại một điểm không trùng với 2 đầu mút A, B.

HD: Để đoạn thẳng AB cắt (C) tại một điểm không trùng với 2 đầu mút A, B ta phải có một điểm nằm trong và một điểm nằm ngoài đường tròn (C)

$\Leftrightarrow P_{A/(C)} . P_{B/(C)} < 0.$

ELIP

1. Định nghĩa:

Trong mặt phẳng Oxy cho 2 điểm cố định $F_1(-c; 0)$ và $F_2(c; 0)$ và độ dài không đổi $2a(a > c > 0)$. Elip là tập hợp các điểm M sao cho $F_1M + F_2M = 2a$

Hai điểm F_1 và F_2 gọi là 2 tiêu điểm của elip. Khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ gọi là tiêu cự.

2. Phương trình chính tắc của elip

Phương trình chính tắc của elip có dạng $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

với $b^2 = a^2 - c^2$.

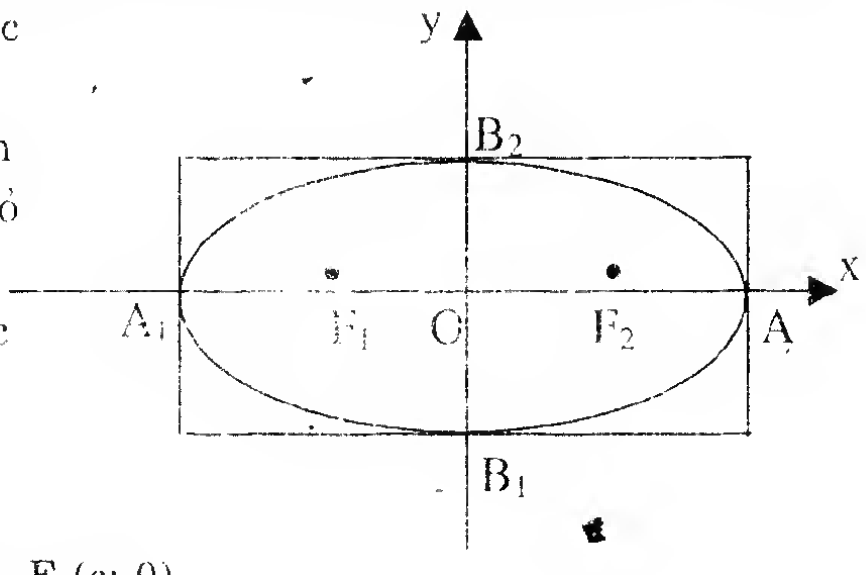
3. Các điểm $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$ là các đỉnh của elip

Đoạn thẳng A_1A_2 gọi là trục lớn, B_1B_2 gọi là trục nhỏ

$A_1A_2 = 2a$ là độ dài trục lớn

$B_1B_2 = 2b$ là độ đài trục nhỏ

Hình chữ nhật có kích thước 2a và 2b, giới hạn bởi các đường thẳng $x = \pm a$ và $y = \pm b$ gọi là hình chữ nhật cơ sở.



4. Các thành phần của elip:

* Hai tiêu điểm: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$

* Bốn đỉnh: $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$

* Độ dài trục lớn: $A_1A_2 = 2a$

* Độ dài trục nhỏ: $B_1B_2 = 2b$

* Tiêu cự: $F_1F_2 = 2c$

* Tâm sai: $e = \frac{c}{a}$.

BÀI TẬP TRONG SÁCH GIÁO KHOA

BT1: Cho 2 đường tròn $C_1(F_1; R_1)$ và $C_2(F_2; R_2)$. C_1 chứa trong C_2 và $F_1 \neq F_2$ .Gọi M là tâm của đường tròn (C) thay đổi nhưng tiếp xúc ngoài với C_1 và tiếp xúc trong với C_2. Hãy chứng tỏ rằng M đi động trên elip.

Giải:

Gọi tiếp điểm của (C) và (C_1) là A, tiếp điểm của (C) và (C_2).

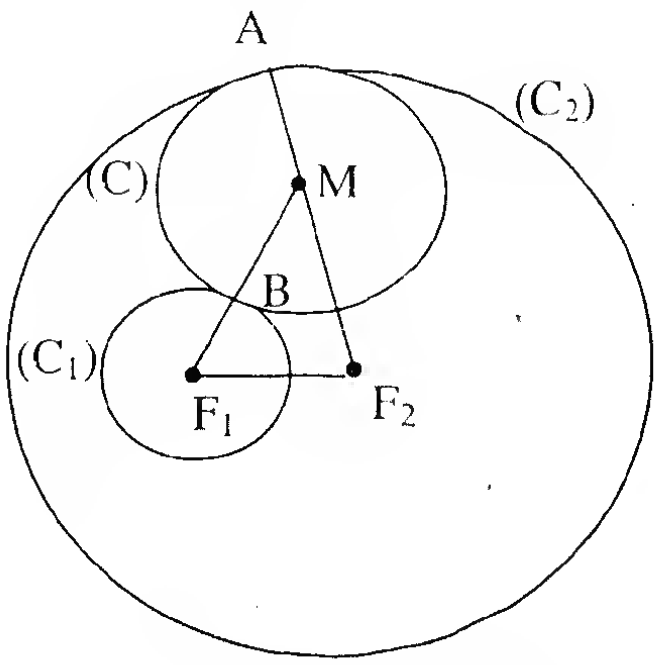
Ta có:

$MF_1 + MF_2 = (R_1 + MA) + (R_2 - MB)$

$= R_1 + R_2 + (MA - MB)$

$= R_1 + R_2$ (do MA = MB)

Vậy M đi động trên elip có 2 tiêu điểm là F_1 và F_2 độ dài trục lớn $R_1 + R_2$.



BL1: Cho elip (E) thay đổi và có tâm là gốc tọa độ. (E) luôn đi qua điểm A(4; 0) và độ dài trục lớn của (E) là 16. Hãy chứng tỏ các tiêu điểm F, F' của (E) đi động trên một elip (E').

HD: Xét điểm A'(−4; 0). Ta có FF' và AA' có cùng trung điểm O, vì vậy FAF'A' là hình bình hành $A \in (E) \Rightarrow FA + FA' = 16$

Vậy F đi động trên elip (E') có 2 tiêu điểm A, A' và có trục lớn 2a = 16

BT2: Lập phương trình chính tắc của elip, biết:

a. Trục lớn và trục nhỏ lần lượt là 8 và 6.

b. Trục lớn bằng 10 và tiêu cự bằng 6.

HD: Để lập phương trình của elip ta phải tính a, b; bài toán có 2 ẩn, ta cần lập hệ phương trình hai ẩn a, b chú ý đến công thức: $c^2 = a^2 - b^2$.

Giải:

Phương trình chính tắc của elip có dạng (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a > b > 0$

a. Độ đài trục lớn là 2a, độ đài trục bé là 2b, vì vậy ta có:

$$\begin{cases} 2a = 8 \\ 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow (E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

b. Tiêu cự của elip bằng 2c, ta có: $2c = 6 \Leftrightarrow c = 3$

Mặt khác $c^2 = a^2 - b^2$ vậy ta có hệ : $\begin{cases} 2a = 10 \\ a^2 - b^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b^2 = a^2 - 9 = 16 \end{cases}$

Vậy (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

BT3: Xác định độ dài các trục, tọa độ tiêu điểm, tọa độ các đỉnh và vẽ các elip có phương trình sau:

a. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ b. $4x^2 + 9y^2 = 1$ c. $4x^2 + 9y^2 = 36$.

Giải:

Elip (E) đã cho có dạng : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$

a. Ta có: $a = 5$ và $b = 3 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow c = 4$

Vậy (E) có độ đài trục lớn $2a = 10$, độ dài trục bé là $2b = 6$, tọa độ các tiêu điểm $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$ tọa độ các đỉnh $A_1(-5; 0)$, $A_2(5; 0)$, $B_1(0; -3)$, $B_2(0; 3)$

(Bạn đọc tự vẽ hình).

b. $4x^2 + 9y^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 1$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3} \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{5}{36} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{5}}{6}$

Vậy (E) có độ đài trục lớn $2a = 1$, độ đài trục bé là $2b = \frac{2}{3}$, tọa độ các tiêu điểm $F_1(-\frac{\sqrt{5}}{6}; 0)$, $F_2(\frac{\sqrt{5}}{6}; 0)$, tọa độ các đỉnh $A_1(-\frac{1}{2}; 0)$, $A_2(\frac{1}{2}; 0)$, $B_1(0; -\frac{1}{3})$, $B_2(0; \frac{1}{3})$.

c. $4x^2 + 9y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{36} + \frac{9y^2}{36} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Giải tương tự câu a, b.

BT4: Lập phương trình chính tắc của elip trong các trường hợp sau:

a. Elip đi qua các điểm $M(0; 3)$ và $N(3; -\frac{12}{5})$.

b. Một tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{3}; 0)$ và điểm $M(1; \frac{\sqrt{3}}{2})$ nằm trên elip.

Giải:

Elip có phương trình chính tắc dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$

a. Elip đi qua các điểm M(0; 3) và N(3; $-\frac{12}{5}$) ta có:

$$\begin{cases} \frac{0}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \\ \frac{9}{a^2} + \frac{144}{25b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{b^2} = 1 \\ \frac{9}{a^2} + \frac{144}{25b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 9 \\ \frac{9}{a^2} + \frac{144}{25.9} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 9 \\ \frac{9}{a^2} = 1 - \frac{144}{25.9} = \frac{81}{25.9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 9 \\ a^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow (E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

b. Tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3}; 0) \Rightarrow c = \sqrt{3} \Rightarrow a^2 - b^2 = c^2 = 3 \Rightarrow a^2 = 3 + b^2$ (1)

$M(1; \frac{\sqrt{3}}{2})$ nằm trên elip (E) ta có: $\frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1$ (2)

Thế (1) vào (2) ta có:

$$\frac{1}{3+b^2} + \frac{3}{4b^2} = 1 \Leftrightarrow 4b^2 + 3(3 + b^2) = 4b^2(3 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow 7b^2 + 9 = 4b^4 + 12b^2 \Leftrightarrow 4b^4 + 5b^2 - 9 = 0$$

Đặt $X = b^2 \geq 0$, ta có phương trình: $X^2 + 5X - 9 = 0 \Leftrightarrow X = 1$

Vậy $b^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow (E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1.$

BL: Viết phương trình chính tắc của elip (E) trong mỗi trường hợp sau:

a. Độ dài trục nhỏ bằng 12 và tiêu cự bằng 16.

b. Một tiêu điểm là $F_2(12; 0)$ và điểm M(13; 0) nằm trên (E) (SBT).

BT5: Người ta muốn cắt một bảng hiệu quảng cáo hình elip có các trục lớn và trục nhỏ là 80cm và 40cm từ một tấm ván ép hình chữ nhật có kích thước 80cm × 40cm theo cách như trong bài học. Hỏi phải ghim cái đinh cách mép tấm ván ép bao nhiêu và lấy chu vi vòng dây là bao nhiêu.

Giải:

Hai đinh ghim ở vị trí là 2 tiêu điểm F_1, F_2 tấm ván ép ở vị trí là hình chữ nhật cơ sở của elip (E) nói trên

$$(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

Ta có:

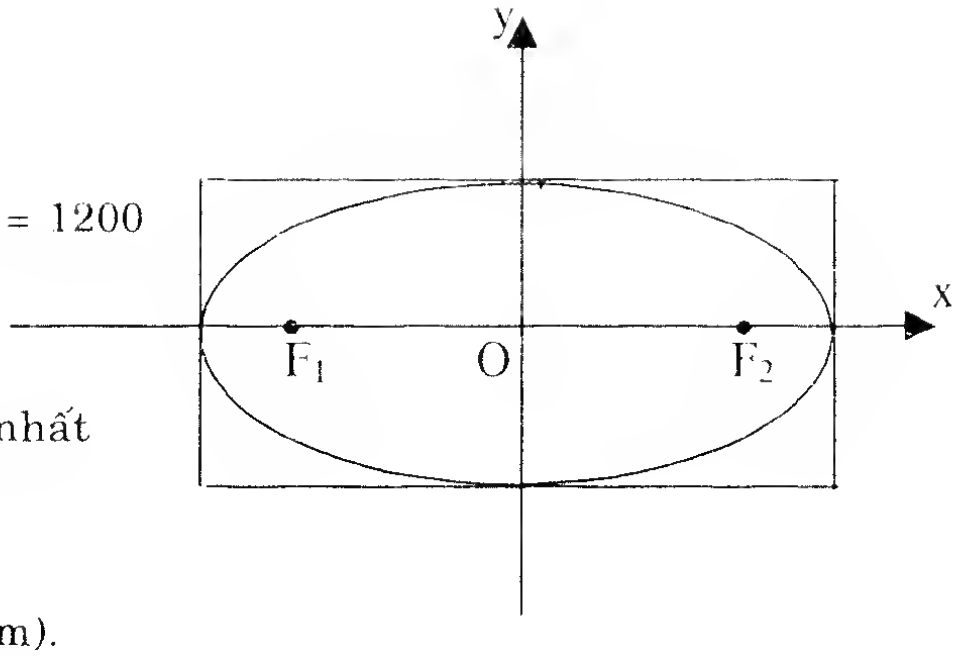
$2a = 80 \Rightarrow a = 40$

$2b = 40 \Rightarrow b = 20$

$\Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 40^2 - 20^2 = 1200$

$\Rightarrow c = 20\sqrt{3}$

$\Rightarrow F_1F_2 = 2c = 40\sqrt{3}$



Dinh cách mép ván gần nhất bằng $40 - 20\sqrt{3}$ (cm)

Chu vi vòng dây bằng:

$2c + 2a = 80 + 40\sqrt{3}$ (cm).

BÀI TẬP BỔ SUNG

BT6: Cho đường thẳng d: $3x + 25 = 0$ và điểm $F(-3; 0)$. Tìm quỹ tích những điểm M sao cho: $5FM = 3MK$ với K là hình chiếu vuông góc của M trên đường thẳng d.

Giải:

Gọi $M(x_0; y_0)$

$FM = \sqrt{(x_0+3)^2 + y_0^2}$; $MK = d(M, d) = \dfrac{|3x_0 + 25|}{3}$

$5FM = 3MK \Leftrightarrow 5\sqrt{(x_0+3)^2 + y_0^2} = 3\dfrac{|3x_0 + 25|}{3}$

$\Leftrightarrow 25(x_0^2 + 6x_0 + y_0^2 + 9) = 9x_0^2 + 150x_0 + 625$

$\Leftrightarrow 25x_0^2 + 150x_0 + 25y_0^2 + 225 = 9x_0^2 + 150x_0 + 625$

$\Leftrightarrow 16x_0^2 + 25y_0^2 = 400 \Leftrightarrow \dfrac{x_0^2}{25} + \dfrac{y_0^2}{16} = 1.$

Vậy tập hợp các điểm M là elip có phương trình : $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

Từ các bài tập trên ta có 2 phương pháp để chứng minh điểm M di động trên một hyperbol:

Cách 1: Gọi $M(x_0; y_0)$, dựa vào giả thiết của bài toán, ta lập phương trình đối với x_0, y_0 sau đó biến đổi phương trình tìm được về dạng chính tắc để kết luận.

Cách 2: Tìm 2 điểm cố định F_1 và F_2 sao cho $F_1M + F_2M = 2a$. với $a > 0$.

BT7: Cho elip (E): $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và điểm C(2; 0). Tìm tọa độ các điểm A, B thuộc (E) biết rằng A, B đối xứng nhau qua trục hoành và tam giác ABC đều.

Giải:

A, B đối xứng nhau qua trục hoành nên có tọa độ $A(x_0; y_0)$ $B(x_0; -y_0)$

Vì A, B thuộc (E) nên : $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1 \Leftrightarrow y_0^2 = 1 - \frac{x_0^2}{4}$ (1)

Mặt khác ABC là tam giác đều ta có:

$AB^2 = AC^2 \Leftrightarrow (x_0 - 2)^2 + y_0^2 = 4y_0^2 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 4 - 3y_0^2 = 0$ (2)

Thế (1) vào (2) ta có: $x_0^2 - 4x_0 + 4 - 3(1 - \frac{x_0^2}{4}) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{4}x_0^2 - 4x_0 + 1 = 0 \Leftrightarrow 7x_0^2 - 16x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \\ x_0 = \frac{2}{7} \end{array}\right.$$

$x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow A \equiv B \equiv C$ loại

$x_0 = \frac{2}{7} \Rightarrow y_0 = \pm\frac{4\sqrt{3}}{7}$

Vậy $A(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7})$, $B(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7})$ hoặc $A(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7})$, $B(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7})$.

BL1: Cho elip (E): $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ và điểm C(2; 0). A, B là 2 điểm trên (E)

a. Chứng minh rằng nếu $A \neq B$ và CA = CB thì A, B đối xứng với nhau qua trục hoành.

b. Tìm tọa độ A, B biết ABC là tam giác đều.

c. Tìm tọa độ A, B để diện tích tam giác ABC lớn nhất.

Giải:

a. Gọi $A(x_0; y_0)$, $B(x_1; y_1)$

Theo giả thiết của bài toán ta có:

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = \frac{x_1^2}{4} + y_1^2 = 1 \\ (x_0 - 2)^2 + y_0^2 = (x_1^2 - 2)^2 + y_1^2 \quad (1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0^2 + 4y_0^2 = x_1^2 + 4y_1^2 \\ (x_0 - 2)^2 - (x_1^2 - 2)^2 = y_1^2 - y_0^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - x_1^2 = 4(y_1^2 - y_0^2) \\ (x_0 - 2)^2 - (x_1^2 - 2)^2 = y_1^2 - y_0^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4[(x_0 - 2)^2 - (x_1 - 2)^2] = x_0^2 - x_1^2$$

$\Leftrightarrow (x_0 - x_1)[3(x_0 + x_1) - 16] = 0$ (*)

Vì $-2 \le x_0, x_1 \le 2 \Rightarrow 3(x_0 + x_1) - 16 < 0$, nên (*) $\Leftrightarrow x_0 = x_1$

Thế vào (1) ta có: $y_0^2 = y_1^2 \Rightarrow y_0 = \pm y_1$

Vì $A \neq B \Rightarrow y_0 = -y_1$

Vậy A, B đối xứng với nhau qua trục hoành.

b. Giải tương tự bài toán.

c. Giả sử $A(x_0; y_0)$, $B(x_0; -y_0)$ ta có: $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1 \Rightarrow y_0^2 = \frac{4 - x_0^2}{4}$

Gọi H là trung điểm của AB $\Rightarrow H(x_0; 0)$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AB.CH = \frac{1}{2}(x_0 - 2)|2y_0| = (x_0 - 2)\sqrt{\frac{4 - x_0^2}{4}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{(2 - x_0)^3(6 + 3x_0)}$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$(2 - x_0)^3(6 + 3x_0) = (2 - x_0)(2 - x_0)(2 - x_0)(6 + 3x_0)$$

$$\le \left(\frac{(2 - x_0) + (2 - x_0) + (2 - x_0) + (6 + 3x_0)}{4}\right)^4 = 3^4$$

$$\Rightarrow S_{ABC} \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Đẳng thức xảy ra b $\Leftrightarrow 2 - x_0 = 6 + 3x_0 \Leftrightarrow x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy $A(-1; \frac{\sqrt{3}}{2})$, $B(-1; -\frac{\sqrt{3}}{2})$ hoặc $A(-1; -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $B(-1; +\frac{\sqrt{3}}{2})$.

BT8: Cho elip (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

a. Gọi E là điểm tùy ý thuộc (E). Chứng minh rằng $4 \le OE \le 5$.

b. Gọi $M(x_0; y_0)$ thuộc (E). Chứng minh: $MF_1 = 5 + \frac{3}{5}x_0$.

c. Tìm M thuộc (E) để MF_1 lớn nhất, bé nhất.

Giải:

a. Gọi $E(x_0; y_0) \in (E)$, ta có: $\frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{16} = 1$

$$\Rightarrow OE = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{25\frac{x_0^2}{25} + 16\frac{y_0^2}{16}} \le \sqrt{25\frac{x_0^2}{25} + 25\frac{y_0^2}{16}}$$

$$= \sqrt{25(\frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{16})} = \sqrt{25} = 5$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow y_0 = 0 \Leftrightarrow$ E là các đỉnh A_1 hoặc A_2

Tương tự : $OE = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{25\frac{x_0^2}{25} + 16\frac{y_0^2}{16}} \ge \sqrt{16\frac{x_0^2}{25} + 16\frac{y_0^2}{16}}$

$$= \sqrt{16(\frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{16})} = 4$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_0 = 0 \Leftrightarrow$ E là các đỉnh B_1 hoặc B_2

Vậy $4 \le OE \le 5$.

b. Gọi $M(x_0; y_0) \in (E)$ ta có: $\frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{16} = 1 \Leftrightarrow y_0^2 = 16(1 - \frac{x_0^2}{25})$

$F_1(-3; 0)$

$MF_1^2 = (x_0 + 3)^2 + y_0^2 = x_0^2 + 6x_0 + 9 + y_0^2$

$$= x_0^2 + 6x_0 + 9 + 16 - 16\frac{x_0^2}{25}$$

$$= \frac{9}{25}x_0^2 + 6x_0 + 25 = (5 + \frac{3}{5}x_0)^2 \Rightarrow MF_1 = |5 + \frac{3}{5}x_0|$$

Vì $|x_0| \le 5 \Rightarrow 5 + \frac{3}{5}x_0 > 0 \Rightarrow MF_1 = 5 + \frac{3}{5}x_0$.

c. $MF_1 = 5 + \frac{3}{5}x_0$ lớn nhất $\Leftrightarrow x_0$ lớn nhất $\Leftrightarrow x_0 = 5 \Leftrightarrow M(5; 0)$

$MF_1 = 5 + \frac{3}{5}x_0$ bé nhất $\Leftrightarrow x_0$ bé nhất $\Leftrightarrow x_0 = -5 \Leftrightarrow M(-5; 0)$.

BL1: Cho elip (E): $\frac{x^2}{289} + \frac{y^2}{64} = 1$

Tìm $M \in (E)$ sao cho MF_2 lớn nhất, bé nhất.

BT9: Cho elip (E): $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ và đường thẳng d: $x - y + C = 0$

a. Định C để d cắt (E) tại 2 điểm phân biệt A, B.

b. Định C để d cắt (E) tại 2 điểm A, B sao cho $AB = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Giải:

a. Xét hệ phương trình tọa độ giao điểm của d và (E)

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ x - y + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{2} + (x + C)^2 = 1 \\ y = x + C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 4Cx + 2C^2 - 2 = 0 \quad (1) \\ y = x + C \end{cases}$$

d và (E) có 2 điểm chung $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = 4C^2 - 3(2C^2 - 2) = -2C^2 + 6 > 0$

$\Leftrightarrow C^2 < 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} < C < \sqrt{3}$ (*).

b. Với điều kiện (*) (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2, do đó $A(x_1; x_1 + C)$ $B(x_2; x_2 + C)$ (do A, B thuộc d)

$\Rightarrow AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + [(x_1 + C) - (x_2 + C)]^2 = 2(x_1 - x_2)^2$

$= 2[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] = 2[\frac{16C^2}{9} - 4\frac{2C^2 - 2}{3}]$ (Định lí Viet)

$= \frac{2}{9}(-8C^2 + 24)$

$\Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{2}{9}(-8C^2 + 24) \Leftrightarrow -8C^2 + 24 = 6 \Leftrightarrow C^2 = \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow C = \pm\frac{3}{2}$ (thỏa (*)

Vậy $C = \pm\frac{3}{2}$.

BL 1: Cho elip (E): $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ và đường thẳng d: $x - y = 0$. Gọi Δ là đường thẳng vuông góc với d. Viết phương trình đường thẳng Δ biết Δ cắ (E) tại 2 điểm A, B sao cho AB = 1

HYPERBOL

1. Định nghĩa:

Trong mặt phẳng Oxy cho 2 điểm $F_1(-c; 0)$ và $F_2(c; 0)$ và độ dà không dổi $2a(c > a > 0)$. Hyperbol là tập các điểm M thỏa mãn:

$$|F_1M - F_2M| = 2a .$$

Hai điểm F_1 và F_2 gọi là 2 tiêu điểm của hyperbol.

Khoảng cách F_1F_2 được gọi là tiêu cự

2. Phương trình chính tắc của hyperbol: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y}{b^2} = 1$ với ($c^2 = a^2 + b^2$; a, b, c > 0).

3. Các thành phần của hyperbol:

* Hai tiêu điểm $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$
* Hai đỉnh $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$
* Độ dài trục thực: $A_1A_2 = 2a$
* Độ dài trục ảo: $B_1B_2 = 2b$
* Tiêu cự: $F_1F_2 = 2c$
* Tâm sai: $e = \frac{c}{a}$
* Hai đường tiệm cận có phương trình: $y = \pm\frac{b}{a}x$.

CÁC BÀI TẬP TRONG SÁCH GIÁO KHOA

BT1: Lập phương trình của chính tắc của hyperbol biết:

a. Độ dài trục thực và trục ảo lần lượt là 10 và 8.

b. Độ dài trục thực là 8 và tiêu cự là 10.

c. Tiêu cự là 20 và một tiệm cận có phương trình $4x - 3y = 0$.

Để viết phương trình chính tắc của hyperbol $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y}{b^2} = 1$ ta cần xác định a, b, bài toán có 2 ẩn a, b. Cần lập hệ phương trình 2 ẩn a, b. Chú ý đến công thức $c^2 = a^2 + b^2$, c > 0.

Giải:

a. Hyperbol (H) có phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y}{b^2} = 1$

Độ dài trục thực: $2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$

Độ dài trục ảo: $2b = 8 \Leftrightarrow b = 4 \Rightarrow$ (H): $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.

b. Độ dài trục thực: $2a = 8 \Leftrightarrow a = 4$

Tiêu cự: $2c = 10 \Leftrightarrow c = 5$

Mặt khác: $c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow$ (H): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

c. Tiêu cự: $2c = 20 \Leftrightarrow c = 10 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 100$ (1)

Phương trình tiệm cận $y = \pm\frac{b}{a}x$

Mặt khác $4x - 3y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow b = \frac{4}{3}a$

Thế vào (1) ta có:

$$a^2 + (\frac{4}{3}a)^2 = 100 \Leftrightarrow a^2 + \frac{16a^2}{9} = 100 \Leftrightarrow \frac{25}{9}a^2 = 100 \Leftrightarrow a^2 = 36$$

Lại thế vào (1) ta có: $b^2 = 100 - 36 = 64 \Rightarrow$ (H): $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$.

BT2: Tìm độ dài trục thực, tọa độ các tiêu điểm, tọa độ các đỉnh, phương trình các tiệm cận và vẽ các hyperbol sau:

a. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. b. $16x^2 - 9y^2 = 144$. c. $2x^2 - y^2 = 10$.

HD: Để tìm các thành phần của hyperbol ta tính a, b, c sau đó sử dụng các công thức nêu ra trong phần tóm tắt lí thuyết.

Giải:

Phương trình chính tắc của (H) có dạng : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

a. $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$.

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow c = 5$

* Độ dài trục thực: $2a = 8$
* Tọa độ các tiêu điểm $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$
* Tọa độ các đỉnh $A_1(-4; 0)$, $A_2(4; 0)$
* Phương trình các tiệm cận $y = \pm\frac{3}{4}x$.

b. Ta biến đổi về dạng chính tắc:

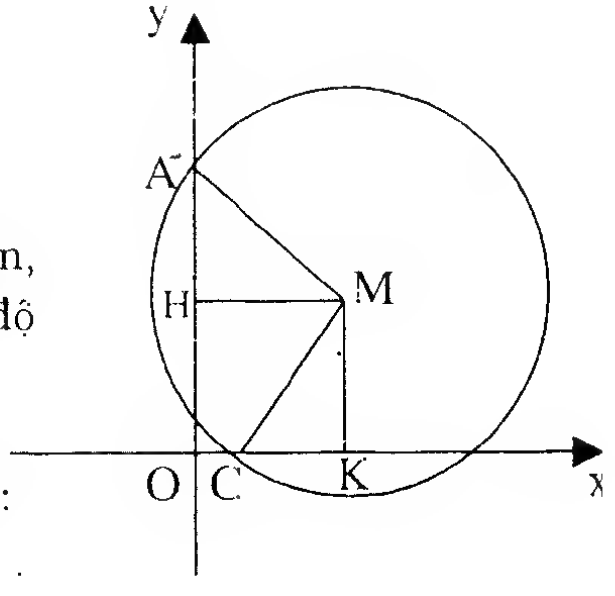
$$16x^2 - 9y^2 = 144 \Leftrightarrow \frac{16x^2}{144} - \frac{9y^2}{144} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Giải tương tự như câu a.

c. $2x^2 - y^2 = 10 \Leftrightarrow \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{10} = 1$

Giải tương tự như câu a.

BT3: Tìm tập hợp các tâm của đường tròn, chắn trên 2 trục Ox, Oy hai đoạn thẳng có độ dài là 10 và 6.



Giải:

Gọi M(x; y) là tâm của đường tròn. Ta có:

$MA^2 = MC^2 \Leftrightarrow MH^2 + AH^2 = MK^2 + KC^2$

$$\Leftrightarrow y^2 + 25 = x^2 + 6$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 16 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad (1)$$

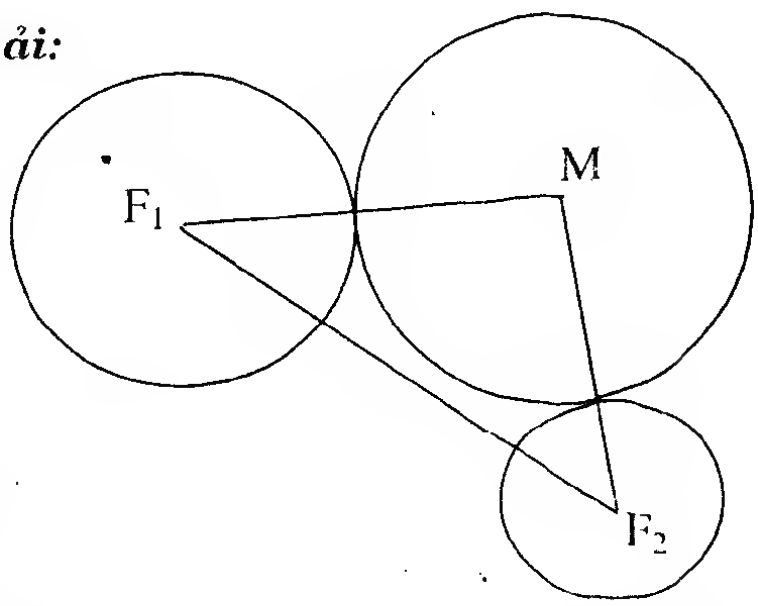
Vậy tập hợp các điểm M là hyperbol có phương trình (1).

BL: Tìm tập hợp các tâm của đường tròn, chắn trên 2 trục Ox, Oy hai đoạn thẳng có độ dài là 2a và 2b ($a, b > 0$).

BT4: Cho 2 đường tròn cố định $C_1(F_1; R_1)$ và $C_2(F_2; R_2)$ $(R_1 \neq R_2)$

Tìm tập hợp tâm M của các đường tròn (C) di động nhưng luôn tiếp xúc ngoài với C_1 và C_2.

Giải:



Gọi R là bán kính của đường tròn (C) ta có:

$MF_1 = R + R_1$

$MF_2 = R + R_2$

$\Rightarrow |MF_1 - MF_1| = |R_1 - R_2|$

Do $R_1 \neq R_2 \Rightarrow |R_1 - R_2| > 0$

Vậy tâm M của (C) luôn di động trên một hyperbol có tiêu điểm F_1, F_2 và có độ dài trục thực là $|R_1 - R_2|$.

BL1: Cho đường tròn (C) tâm F_1 bán kính 2a và điểm F_2 nằm ngoài đường tròn (C). Tìm tập hợp tâm M của các đường tròn qua F_1 và tiếp xúc với (C)

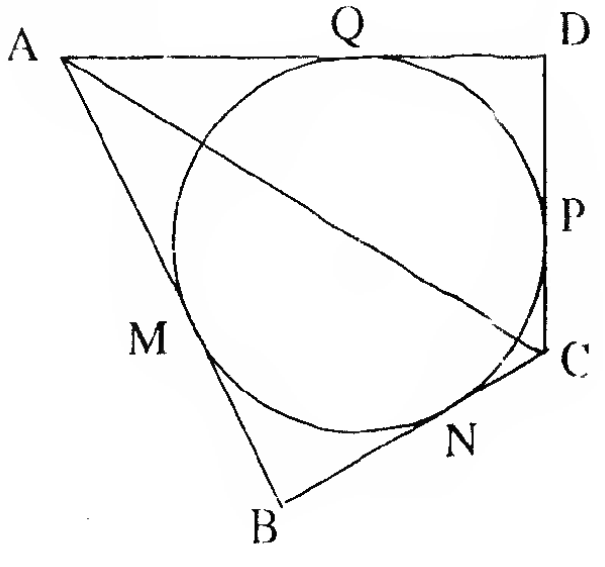
ĐS: Là hyperbol có tiêu điểm F_1, F_2 trục thực 2a.

BL2: Trong mặt phẳng Oxy cho 2 điểm A(−2; 0), B(2; 0) và đường thẳng d: $2x - 3 = 0$

Tìm tập hợp các điểm M sao cho các đường thẳng AM và BM có tích các hệ số góc bằng 1.

ĐS: Là hyperbol : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ bỏ hai đỉnh trên Ox

BL3: Cho tam giác ABC cố định và không cân. D là điểm tùy ý sao cho tứ giác ABCD luôn là tứ giác ngoại tiếp được một đường tròn. Chứng minh rằng D di động trên một hyperbol



HD:

AM = AQ; BM = BN; CN = CP

DP = DQ

$\Rightarrow |DA - DC| = |AQ - CP| = |AM - CN|$

$= |AB - BC|$

Lại do $|AB - AC|$ là số dương không đổi nên D di động trên hyperbo có 2 tiêu điểm là C, A và có độ dài trục thực $|AB - BC|$.

BT5: Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm tùy ý trên hyperbol đến 2 tiệm cận là một số không đổi.

Giải:

(H) có phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y}{b^2} = 1$

(H) có 2 tiệm cận d_1: $y = \frac{b}{a}x \Leftrightarrow bx - ay = 0$ và tiệm cận d_2: $y = -\frac{b}{a}x$

$\Leftrightarrow bx + ay = 0$

Gọi $M(x_0; y_0) \in (H)$ ta có: $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$

Khoảng cách từ M đến d_1: $d(M; d_1) = \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Khoảng cách từ M đến d_2: $d(M; d_2) = \frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$$\Rightarrow d(M; d_1).d(M; d_2) = \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|b^2x_0^2 - a^2y_0^2|}{a^2 + b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

BÀI TẬP BỔ SUNG

BT6: Cho hyperbol (H): $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$. Tìm điểm M thuộc (H) sao cho M nhìn 2 tiêu điểm F_1, F_2 của (H) dưới một góc vuông.

Giải:

a. (H) có 2 tiêu điểm $F_1(-\sqrt{10}; 0)$, $F_2(\sqrt{10}; 0)$

Gọi $M(x_0; y_0) \in (H)$ ta có: $x_0^2 - \frac{y_0^2}{9} = 1 \Leftrightarrow x_0^2 = 1 + \frac{y_0^2}{9}$ (1)

$\overrightarrow{MF_1} = (-\sqrt{10} - x_0; -y_0)$; $\overrightarrow{MF_2} = (\sqrt{10} - x_0; -y_0)$

$\overrightarrow{MF_1} \perp \overrightarrow{MF_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{MF_1}.\overrightarrow{MF_2} = 0 \Leftrightarrow (-\sqrt{10} - x_0)(\sqrt{10} - x_0) + y_0^2 =$

$\Leftrightarrow -10 + x_0^2 + y_0^2 = 0$ (2)

Thay (1) vào (2) ta có:

$$-10 + 1 + \frac{y_0^2}{9} + y_0^2 = 0 \Leftrightarrow 10y_0^2 = 81 \Leftrightarrow y_0^2 = \frac{81}{10} \Leftrightarrow y_0 = \pm\frac{9}{\sqrt{10}}$$

Lại thay vào (1) ta có: $x_0^2 = \frac{19}{10} \Leftrightarrow x_0 = \pm\sqrt{\frac{19}{10}}$

Vậy có 4 điểm M thỏa bài toán có tọa độ :

$$\left(\sqrt{\frac{19}{10}}; \frac{9}{\sqrt{10}}\right), \left(-\sqrt{\frac{19}{10}}; \frac{9}{\sqrt{10}}\right), \left(\sqrt{\frac{19}{10}}; -\frac{9}{\sqrt{10}};\right), \left(-\sqrt{\frac{19}{10}}; -\frac{9}{\sqrt{10}}\right).$$

BT7: Cho (H): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

a. Gọi $M(x_0; y_0)$ thuộc (H) chứng minh:

$$MF_1 = \left|\frac{5}{4}x_0 + 4\right|.MF_2 = \left|\frac{5}{4}x_0 - 4\right|.$$

b. Tìm M thuộc (H)

i. sao cho $MF_1 = 10$.

ii. $\widehat{F_1MF_2} = 90^0$.

Giải:

a. $M(x_0; y_0)$ thuộc (H) ta có: $\frac{x_0^2}{16} - \frac{y_0^2}{9} = 1 \Rightarrow y_0^2 = 9(\frac{x_0^2}{16} - 1)$

(H) có tiêu điểm $F_1(-5; 0)$

$$\Rightarrow MF_1^2 = (x_0 + 5)^2 + y_0^2 = x_0^2 + 10x_0 + 25 + y_0^2$$

$$= x_0^2 + 10x_0 + 25 + 9(\frac{x_0^2}{16} - 1) = \frac{25}{16}x_0^2 + 10x_0 + 16$$

$$= (\frac{5}{4}x_0 + 4)^2 \quad \Rightarrow MF_1 = \left|\frac{5}{4}x_0 + 4\right|$$

Chứng minh tương tự: $MF_2 = \left|\frac{5}{4}x_0 - 4\right|$.

b. $MF_1 = \left|\frac{5}{4}x_0 + 4\right| = 10$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{5}{4}x_0 + 4 = 10 \\ \frac{5}{4}x_0 + 4 = -10 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \frac{5}{4}x_0 = 6 \\ \frac{5}{4}x_0 = -14 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_0 = \frac{24}{5} \\ x_0 = -\frac{56}{5} \end{bmatrix}$$

$x_0 = \frac{24}{5} \Rightarrow y_0^2 = \frac{99}{25} \Leftrightarrow y_0 = \pm\frac{3\sqrt{11}}{5}$

$x_0 = -\frac{56}{5} \Rightarrow y_0^2 = \frac{1539}{25} \Leftrightarrow y_0 = \pm\frac{\sqrt{1539}}{5}$

Vậy có 4 điểm M thỏa mãn có tọa độ :

$(\frac{24}{5}; \frac{3\sqrt{11}}{5}), (\frac{24}{5}; -\frac{3\sqrt{11}}{5}), (-\frac{56}{5}; \frac{\sqrt{1539}}{5}), (-\frac{56}{5}; -\frac{\sqrt{1539}}{5})$.

c. Sử dụng định lí Pitagor cho tam giác vuông F_1MF_2 ta có:

$F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2$ (*)

Theo câu a

$(*) \Leftrightarrow 100 = (\frac{5}{4}x_0 + 4)^2 + (\frac{5}{4}x_0 - 4)^2$

$\Leftrightarrow 100 = \frac{25}{16}x_0^2 + 10x_0 + 16 + \frac{25}{16}x_0^2 - 10x_0 + 16$

$\Leftrightarrow 100 = \frac{50}{16}x_0^2 + 32 \Leftrightarrow \frac{50}{16}x_0^2 = 68 \Leftrightarrow x_0^2 = \frac{544}{25} \Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{4\sqrt{34}}{5}$

$\Rightarrow y_0^2 = \frac{81}{25} \Leftrightarrow y_0 = \pm\frac{9}{5}$

Vậy có 4 điểm M thỏa đề bài có tọa độ là:

$(\frac{4\sqrt{34}}{5}; \frac{9}{5}), (\frac{4\sqrt{34}}{5}; -\frac{9}{5}), (-\frac{4\sqrt{34}}{5}; \frac{9}{5}), (-\frac{4\sqrt{34}}{5}; -\frac{9}{5})$.

PARABOL

1. Định nghĩa:

Cho điểm và đường thẳng Δ không chứa F. Parabol là tập hợp các điểm M sao cho khoảng cách từ M đến F bằng khoảng cách từ M đến Δ.

2. Phương trình chính tắc của Parabol:

a. Trong mặt phẳng Oxy cho điểm $F(\frac{p}{2}; 0)$ và đường thẳng Δ: $x = -\frac{p}{2}$ ($p > 0$). $M(x; y)$ thuộc parabol (P) $\Leftrightarrow y^2 = 2px$.

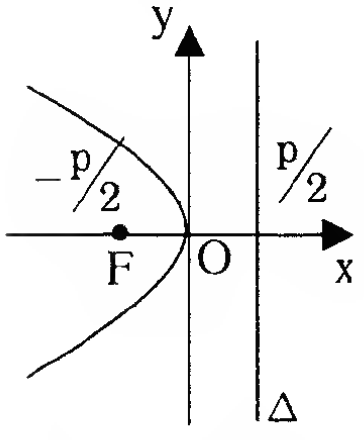
b. Phương trình chính tắc của parabol có dạng: $y^2 = 2px$ ($p > 0$).

3. Các thành phần của parabol

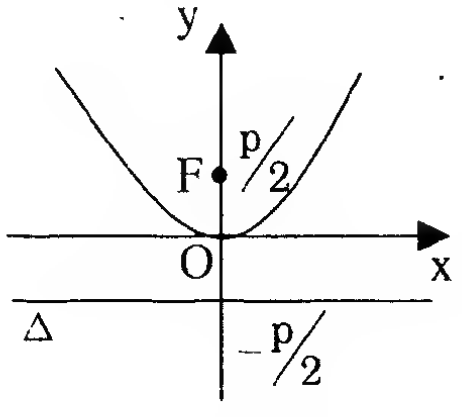
* Tiêu điểm $F(\frac{p}{2}; 0)$

* Đường chuẩn Δ: $x = -\frac{p}{2}$.

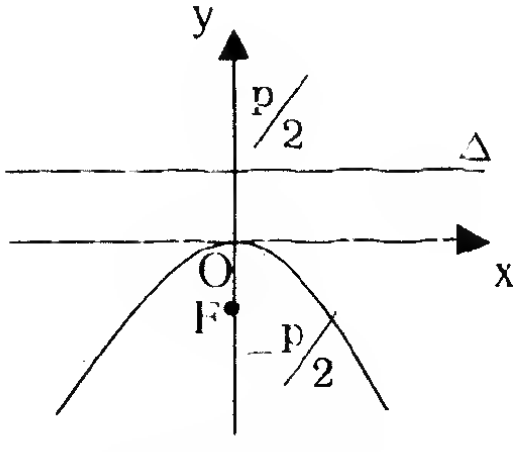
4. Ngoài dạng chính tắc phương trình parabol còn có các dạng sau:



$y^2 = -2px$ $(p>0)$



$x^2 = 2py$ $(p>0)$



$x^2 = -2py$ $(p>0)$.

BÀI TẬP TRONG SÁCH GIÁO KHOA

BT1: Viết phương trình chính tắc của parabol biết:

a. Tiêu điểm là F(2; 0). b. Đường chuẩn $x = -3$. c. $p = 1$.

HD: Để viết phương trình của parabol ta cần xác định tham số tiêu p

Giải:

Parabol (P) có phương trình dạng chính tắc: $y^2 = 2px$ $(p > 0)$

a. (P) có tiêu điểm $F(\frac{p}{2}; 0) \Rightarrow \frac{p}{2} = 2 \Leftrightarrow p = 4 \Rightarrow$ (P): $y^2 = 8x$.

b. (P) có đường chuẩn có phương trình Δ: $x = -\frac{p}{2} \Rightarrow \frac{p}{2} = 3 \Leftrightarrow p = 6$

$\Rightarrow$ (P) : $y^2 = 12x$.

c. (P): $y^2 = 2x$.

BT2: Tìm tọa độ tiêu điểm, phương trình đường chuẩn và vẽ các parabol sau:

a. $y^2 = 8x$. b. $x = \frac{1}{2}y^2$. c. $y = x^2$.

d. $y^2 + 4x = 0$. e. $x^2 + 12y = 0$.

Giải:

a. Parabol có phương trình dạng: $y^2 = 2px$ với $p = 4$ vì vậy có

* Tiêu điểm F(2; 0)

* Phương trình dường chuẩn Δ: x = -2.

b. $x = \frac{1}{2}y^2 \Leftrightarrow y^2 = 2x$

Parabol có phương trình dạng: $y^2 = 2px$ với p = 1 vì vậy có

* Tiêu điểm $F(\frac{1}{2}; 0)$

* Phương trình dường chuẩn Δ: $x = -\frac{1}{2}$.

c. $y = x^2 \Leftrightarrow x^2 = y$

Parabol có phương trình dạng: $x^2 = 2py$ với $p = \frac{1}{2}$ vì vậy có

* Tiêu điểm $F(0; \frac{1}{4})$

* Đường chuẩn Δ: $y = -\frac{1}{4}$.

d. $y^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow y^2 = -4x$

Parabol có phương trình dạng $y^2 = -2px$ với p = 2 vì vậy có

* Tiêu điểm $F(-1; 0)$

* Đường chuẩn Δ: x = 1.

e. $x^2 + 12y = 0 \Leftrightarrow x^2 = -12y$

Parabol có phương trình dạng $x^2 = -2py$ với p = 6 vì vậy có

* Tiêu điểm $F(0; -3)$

* Đường chuẩn Δ: y = 3.

BT3: Cho parabol (P) có phương trình: $y^2 = 4x$ và điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (P)

a. Tính khoảng cách từ M đến tiêu điểm F theo x_0, y_0.

b. Tìm tọa độ các điểm thuộc (P) và cách F một khoảng bằng 2.

Giải:

(P) có phương trình dạng $y^2 = 2px$ với p = 2

Vậy (P) có tiêu điểm F(1; 0)

a. $M(x_0; y_0)$ thuộc (P) $\Rightarrow y_0^2 = 4x_0$

$$MF = \sqrt{(x_0 - 1)^2 + y_0^2} = \sqrt{(x_0^2 - 2x_0 + 1 + y_0^2} = \sqrt{x_0^2 - 2x_0 + 1 + 4x_0}$$

$$= \sqrt{x_0^2 + 2x_0 + 1} = \sqrt{(x_0 + 1)^2} = |x_0 + 1|$$

Vì $y_0^2 = 4x_0 \Rightarrow x_0 \geq 0 \Rightarrow MF = x_0 + 1$

Chú ý: ta có thể tính MF đựa vào định nghĩa của parabol

(P) có đường chuẩn Δ: $x = -1 \Leftrightarrow x + 1 = 0$

Theo định nghĩa Parabol ta có: $MF = d(M; \Delta) = |x_0 + 1|$

Vì $y_0^2 = 4x_0 \Rightarrow x_0 \geq 0 \Rightarrow MF = x_0 + 1$.

b. Theo câu a ta có: $MF = 2 \Leftrightarrow x_0 + 1 = 2 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0^2 = 4x_0 = 4 \Rightarrow y_0 = \pm 2$

Vậy có 2 điểm M có tọa độ (1; 2), (1; −2)

Ta có bài toán tổng quát hơn sau.

BL1: Cho parabol (P): $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ và điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (P)

a. Tính khoảng cách từ M đến tiêu điểm F.

b. Tìm tọa độ các điểm thuộc (P) và cách F một khoảng bằng 2.

ĐS: a. $MF = x_0 + \frac{p}{2}$

BT4: Một đường thẳng vuông góc với trục đối xứng của parabol (P): $y^2 = 2px$ tại tiêu điểm F và cắt (P) tại 2 điểm A và B. Tính độ dài AB.

Giải:

(P) có tiêu điểm $F(\frac{p}{2}; 0)$

(P) có trục đối xứng là trục hoành Ox

$\Rightarrow$ AB vuông góc với trục Ox tại F $\Rightarrow$ A, B có hoành độ bằng $\frac{p}{2}$

Thế $x = \frac{p}{2}$ vào phương trình của (P) ta có: $y^2 = 2p\frac{p}{2} = p^2 \Rightarrow y = \pm p$

$\Rightarrow A(\frac{p}{2}; p)$, $B(\frac{p}{2}; -p) \Rightarrow AB = 2p$.

BT5: Cho điểm A và đường thẳng Δ không đi qua A

Tìm tập hợp các tâm M của các đường tròn (C) luôn đi qua A và tiếp xúc với Δ.

Giải:

$A \in (C) \Rightarrow MA = R$ (R là bán kính của (C))

(C) tiếp xúc với $\Delta \Leftrightarrow d(M, \Delta) = R \Rightarrow MA = d(M, \Delta)$

Vậy tập hợp các điểm M là parabol có tiêu điểm A và đường cluẩn Δ.

ĐƯỜNG CHUẨN CỦA 3 ĐƯỜNG CÔNIC

1. Đường chuẩn của 3 đường cônic

Cho parabol (P) có tiêu điểm F và đường chuẩn Δ. Xét một điểm tùy ý M, ta có: $M \in (P) \Leftrightarrow \dfrac{MF}{d(M;\Delta)} = 1$

Đối với elip (E) hay hyperbol (H), tương ứng với mỗi điểm F luôn có đường thẳng Δ có tính chất: $M \in (E) \Leftrightarrow \dfrac{MF}{d(M;\Delta)} = \dfrac{c}{a} < 1$

$$M \in (H) \Leftrightarrow \frac{MF}{d(M;\Delta)} = \frac{c}{a} > 1.$$

2. Tính chất chung của 3 đường cônic:

Cho điểm F và đường thẳng Δ cố định không đi qua F, cho một hằng số đương e. Tập hợp những điểm M thỏa mãn $\dfrac{MF}{d(M;\Delta)} = e$ là một cônic (C)

Hằng số e được gọi là tâm sai của (C)

Nếu e < 1: (C) là elip

Nếu e = 1: (C) là parabol

Nếu e > 1: (C) là hyperbol.

BÀI TẬP

BT1: Cho một điểm cố định A và một đường thẳng Δ cố định không đi qua A. M là một điểm di động sao cho với mọi m > 0, đường tròn C(M; m) luôn tiếp xúc với Δ và đường tròn C_1(M; 2m) luôn đi qua A. Hãy chứng minh rằng M di dộng trên một hyperbol

HD: Tính $\dfrac{MF}{d(M;\Delta)}$ sau đó sử dụng tính chất chung của 3 đường cônic để kết luận

Giải:

$A \in C_1(M; 2m) \Leftrightarrow MA = 2m$

$C(M; m)$ tiếp xúc với $\Delta \Leftrightarrow d(M; \Delta) = m \Rightarrow \dfrac{MA}{d(M;\Delta)} = \dfrac{2m}{m} = 2 > 1$

Vậy điểm M di động trên hyperbol (H) có tiêu điểm A, đường chuẩn Δ và có tâm sai e = 2.

BT2: Cho một điểm A cố định và một đường thẳng d cố định và không đi qua A. Xét các đường tròn (C) thay đổi có tâm M, biết rằng (C) luôn đi

qua A và (C) luôn tiếp xúc với đ. Hãy chứng minh rằng M di động trên một parabol.

Giải:

(C) tiếp xúc với d $\Leftrightarrow$ d(M; đ) = R (R là bán kính của (C))

(C) đi qua A $\Leftrightarrow$ MA = R $\Rightarrow \dfrac{MA}{d(M;\Delta)} = 1$

$\Rightarrow$ M di động trên một parabol có tiêu điểm A và đường chuẩn Δ.

Chú ý: Kết hợp các bài học trước, ta có 3 cách để chứng minh M di động trên một cônic:

Cách 1: Sử dụng định nghĩa

Cách 2: Lập phương trình

Cách 3: Tìm điểm cố định F và đường thẳng cố định Δ, để $\dfrac{MF}{d(M;\Delta)}$ là hằng số. Sau đó sử đụng tính chất của 3 đường cônic để kết luận về đặc điểm của cônic.

CÂU HỎI VÀ BÀI TẬP ÔN TẬP CHƯƠNG III TRONG SÁCH GIÁO KHOA

BT1: Cho 3 điểm A(4; 3), B(2; 7), C(– 3; –8)

a. Tìm tọa độ trọng tâm G, trực tâm H, và tâm T của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b. Chứng minh T, G, H thẳng hàng.

c. Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Giải:

a. * Gọi $G(x_G; y_G)$ Ta có: $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = 1 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow G(1; \dfrac{2}{3})$

* Gọi $H(x_H; y_H)$: $\overrightarrow{AH} = (x_H - 4; y_H - 3)$; $\overrightarrow{BH} = (x_H - 2; y_H - 7)$

$\overrightarrow{BC} = (-5; -15)$; $\overrightarrow{AC} = (-7; -11)$

Ta có: $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BH} \perp \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -5(x_H - 4) - 15(y_H - 3) = 0 \\ -7(x_H - 2) - 11(y_H - 7) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -5x_H - 15y_H + 65 = 0 \\ -7x_H - 11y_H + 91 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 13 \\ y_H = 0 \end{cases} \Rightarrow H(13;\ 0)$$

* Gọi $T(x_T;\ y_T)$

$AT^2 = (x_T - 4)^2 + (y_T - 3)^2 = x_T^2 + y_T^2 - 8x_T - 6y_T + 25$

$BT^2 = (x_T - 2)^2 + (y_T - 7)^2 = x_T^2 + y_T^2 - 4x_T - 14y_T + 53$

$CT^2 = (x_T + 3)^2 + (y_T + 8)^2 = x_T^2 + y_T^2 + 6x_T + 16y_T + 73$

Ta có:

$$\begin{cases} AT^2 = BT^2 \\ AT^2 = CT^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_T^2 + y_T^2 - 8x_T - 6y_T + 25 = x_T^2 + y_T^2 - 4x_T - 14y_T + 53 \\ x_T^2 + y_T^2 - 8x_T - 6y_T + 25 = x_T^2 + y_T^2 + 6x_T + 16y_T + 73 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -4x_T + 8y_T = 28 \\ -14x_T - 22y_T = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_T = -5 \\ y_T = 1 \end{cases} \Rightarrow T(-5;\ 1).$$

b. Để chứng minh T, G, H thẳng hàng ta chứng minh $\overrightarrow{TG}$, $\overrightarrow{TH}$ cùng phương

$$\overrightarrow{TG} = (6;\ -\frac{1}{3}) ;\ \overrightarrow{TH} = (18;\ -1)$$

Ta có: $6.(-1) - (-\frac{1}{3})18 = 0$

$\Rightarrow$ TG, TH cùng phương $\Rightarrow$ T, G, H thẳng hàng.

c. Đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC có tâm $T(-5;\ 1)$ và có bán kính $R = TA = \sqrt{81+4} = \sqrt{85} \Rightarrow (C): (x+5)^2 + (y-1)^2 = 85$.

BL: Cho A(1; 0), B(0; 1), C(2; 3)

a. Tìm toạ độ trọng tâm G, trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác OAB.

b. Chứng minh rằng G, C và trung điểm của A thẳng hàng.

BT2: Cho hình chữ nhật ABCD. Biết A(5; 1), C(0; 6) và phương trình cạnh CD: $x + 2y - 12 = 0$. Tìm phương trình các cạnh còn lại.

Giải:

AB đi qua A(5; 1)

AB // CD $\Rightarrow$ AB có vectơ pháp tuyến $\vec{n}(1;\ 2)$

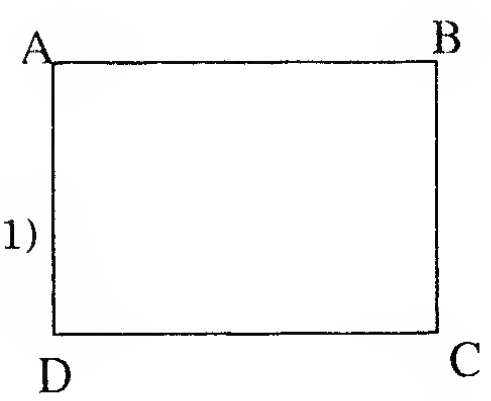
$\Rightarrow$ AB: $1(x-5) + 2(y-1) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 7 = 0$

AD đi qua A(5; 1),

AD $\perp$ CD $\Rightarrow$ AD có vectơ pháp tuyến $\vec{n_1} = (2;\ -1)$

$\Rightarrow$ AD: $2(x-5) - 1(y-1) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - 9 = 0$

BC đi qua C(0; 6)



BC // AD $\Rightarrow$ BC có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1} = (2; -1)$

$\Rightarrow$ BC: $2(x - 0) - 1(y - 6) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 6 = 0$.

BL1: Lập phương trình các cạnh của hình chữ nhật ABCD biết tâm I(1; 1); M(2; 4) $\in$ AB, N(0; −1) $\in$ CD, AB = 2AD

Giải:

AB qua M nên có phương trình:

$A(x - 2) + B(y - 4) = 0 \Leftrightarrow Ax + By - 2A - 4B = 0 \qquad (A^2 + B^2 > 0)$

CD song song với AB và qua N nên có phương trình:

$A(x - 0) + B(y + 1) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + B = 0$

Vì I là tâm đối xứng nên:

$$d(I; AB) = d(I; CD) \Leftrightarrow \frac{|A + 3B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|A + 2B|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\Leftrightarrow |A + 3B| = |A + 2B| \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A + 3B = A + 2B \\ A + 3B = -A - 2B \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} B = 0 \\ 2A = -5B \end{bmatrix}$$

TH 1: $2A = -5B$: Chọn A = 5, B = −2

AB: $5x - 2y - 2 = 0$; CD: $5x - 2y - 2 = 0 \Rightarrow$ AB $\equiv$ CD (loại).

TH 2: B = 0, chọn A = 1 ta có:

AB: $x - 2 = 0$; CD: $x = 0 \Rightarrow$ BC: $y + 1 = 0$; AD: $y = 3$.

BL2: Lập phương trình các cạnh của hình chữ nhật ABCD biết:

1. Tâm I(1; 1); M(2; 4) $\in$ AB; N(−2; −1) $\in$ CD, AB = 2AD.
2. Tâm I(1; 1); M(2; 4) $\in$ AB; N(−2; −1) $\in$ CB, AB = 2AD.

BT3: Cho A(1; 2), B(−3; 1) và C(4; −2). Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 = MC^2$.

HD: Gọi M(x; y), từ đẳng thức đã cho thu được biểu thức liên hệ x, y.

Giải:

Gọi M(x; y). Ta có:

$MA^2 = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5$

$MB^2 = (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = x^2 + y^2 + 6x - 2y + 10$

$MC^2 = (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = x^2 + y^2 - 8x + 4y + 20$

$MA^2 + MB^2 = MC^2 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5) + (x^2 + y^2 + 6x - 2y + 10)$

$= x^2 + y^2 - 8x + 4y + 20$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 4x - 6y + 15 = x^2 + y^2 - 8x + 4y + 20$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 12x - 10y - 5 = 0 \quad (*)$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn có phương trình (*)

BT4: Tìm góc giữa 2 đường thẳng Δ_1 và Δ_2 trong các trường hợp sau:

a. Δ_1: $2x + y - 4 = 0$; Δ_2: $5x - 2y + 3 = 0$.

b. Δ_1: $y = -2x + 4$; Δ_2: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

HD: Sử dụng công thức $\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

Giải:

Gọi φ là góc giữa Δ_1, Δ_2

a. $\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{|2.5 + 1.(-2)|}{\sqrt{2^2 + 1^2}\sqrt{5^2 + (-2)^2}} = \frac{8}{\sqrt{5}\sqrt{29}} = \frac{8}{\sqrt{145}}$

Nếu đề toán yêu cầu tính gần đúng giá trị của φ thì

$\cos\varphi = \approx 0{,}6644 \quad \Rightarrow \varphi \approx 48^0 21' 59''$.

b. Δ_1: $y = -2x + 4 \Leftrightarrow 2x + y - 4 = 0$

Δ_2: $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow x - 2y + 3 = 0$

Vì $A_1A_2 + B_1B_2 = 2.1 + 1(-2) = 0 \Rightarrow \Delta_1 \perp \Delta_2 \Rightarrow \varphi = 90^0$.

BT5: Tìm tập hợp các điểm cách đều hai đường thẳng

Δ_1: $5x + 3y - 3 = 0$,

Δ_2: $5x + 3y + 7 = 0$.

Giải:

Gọi M(x; y)

M cách đều hai đường thẳng Δ_1, $\Delta_2 \Leftrightarrow d(M; \Delta_1) = d(M; \Delta_2)$

$$\Leftrightarrow \frac{|5x + 3y - 3|}{\sqrt{34}} = \frac{|5x + 3y + 7|}{\sqrt{34}} \Leftrightarrow |5x + 3y - 3| = |5x + 3y + 7|$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x + 3y - 3 = 5x + 3y + 7 \\ 5x + 3y - 3 = -5x - 3y - 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow 5x + 3y - 3 = -5x - 3y - 7$$

$$\Leftrightarrow 10x + 6y + 4 = 0 \Leftrightarrow 5x + 3y + 2 = 0.$$

BL1: Cho 2 đường thẳng song song

Δ_1: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$; Δ_2: $A_1x + B_1y + C_2 = 0$ $(C_1 \neq C_2)$

Viết phương trình đường thẳng song song và cách đều Δ_1, Δ_2.

ĐS: $A_1x + B_1y + \frac{C_1 + C_2}{2} = 0$.

BL2: Viết phương trình phương trình đường thẳng Δ song song và cách dường thẳng d: $Ax + By + C = 0$ một khoảng h.

HD: M(x; y) $\in \Delta \Leftrightarrow$ d(M; d) = h (*)

Từ (*) ta thu được 2 phương trình, đó chính là phương trình của 2 đường thẳng cần tìm.

BT6: Cho đường thẳng Δ: x − y + 2 = 0 và 2 điểm O(0; 0), A(2; 0);

a. Chứng minh rằng 2 điểm A, O nằm về cùng một phía đối với đường thẳng Δ.

b. Tìm điểm đối xứng của O qua Δ.

c. Tìm điểm M trên Δ sao cho độ dài đường gấp khúc OMA ngắn nhất.

Giải:

a. Vì: (2 − 0 + 2)(0 − 0 + 2) = 8 > 0

Vậy 2 điểm A, O nằm về cùng một phía đối với đường thẳng Δ.

b. Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u}(1; 1)$

Gọi $C(x_1; y_1)$ đối xứng O qua Δ. Ta có: $\overrightarrow{OC}(x_1; y_1)$

OC có trung điểm $H(\frac{x_1}{2}; \frac{y_1}{2})$. Ta có: $\overrightarrow{OC} \perp \vec{u}$ và $H \in \Delta$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 = 0 \\ \frac{x_1}{2} - \frac{y_1}{2} + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + y_1 = 0 \\ x_1 - y_1 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow C(-2; 2).$$

c. Điểm M thỏa mãn bài toán là giao điểm AC và Δ

AC: (2 − 0)(x − 2) − (−2 − 2)(y − 0) = 0 $\Leftrightarrow$ 2x + 4y − 4 = 0

Tọa độ M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 2x + 4y - 4 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow M(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}).$$

BL: Cho đường thẳng d: x − y − 1 = 0 và 2 điểm A(1; 1) và B(2; −1)

a. Tìm M thuộc d sao cho AM + BM bé nhất.

b. Tìm GTNN của biểu thức $H = \sqrt{(t-1)^2 + (t-2)^2} + \sqrt{(t-2)^2 + t^2}$

c. Tìm toạ độ A_0 đối xứng với A qua d.

d. Tìm N thuộc d sao cho $|AN - BN|$ lớn nhất.

HD:

a. Chú ý A, B khác phía đối với d, vậy điểm M cần tìm là giao điểm của AB đối với d.

b. Lấy điểm $M_0(t; t-1)$ thuộc d

$\Rightarrow II = \sqrt{(t-1)^2+(t-2)^2} + \sqrt{(t-2)^2+t^2} = AM_0 + BM_0$

Điểm M_0 cần tìm là điểm M ở câu a.

d. Điểm N cần tìm là giao điểm của BA_0 và d.

BT7: Lập phương trình 2 đường phân giác của góc hợp bởi 2 đường thẳng

$$3x - 4y + 12 = 0 \; ; \; 12x + 5y - 7 = 0.$$

Giải:

Gọi d là đường phân giác của góc hợp bởi 2 đương thẳng

Δ_1: $3x - 4y + 12 = 0$;

Δ_2: $12x + 5y - 7 = 0$

$$M(x; y) \in d \Leftrightarrow d(M; \Delta_1) = d(M; \Delta_2) \Leftrightarrow \frac{|3x-4y+12|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|12x+5y-7|}{\sqrt{144+25}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|3x-4y+12|}{5} = \frac{|12x+5y-7|}{13}$$

$$\Leftrightarrow 13|3x-4y+12| = 5|12x+5y-7|$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 13(3x-4y+12) = 5(12x+5y-7) \\ 13(3x-4y+12) = -5(12x+5y-7) \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 21x+77y-191=0 \quad (1) \\ 99x-27y+121=0 \quad (2) \end{bmatrix}$$

Vậy 2 đường phân giác cần tìm có phương trình là (1) và (2)

BL1: Cho 2 đường thẳng cắt nhau:

$$d_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0; \; d_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Viết phương trình đường phân giác của góc hợp bởi d_1 và d_2.

BT8: Cho đường tròn (C) có tâm I(1; 2) và bán kính R = 3. Tìm tập hợp các điểm M mà từ đó kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C) tạo với nhau góc 60^0.

Giải:

Giả sử từ M kẻ 2 tiếp tuyến đến (C) là MA, MB (A, B là các tiếp điểm)

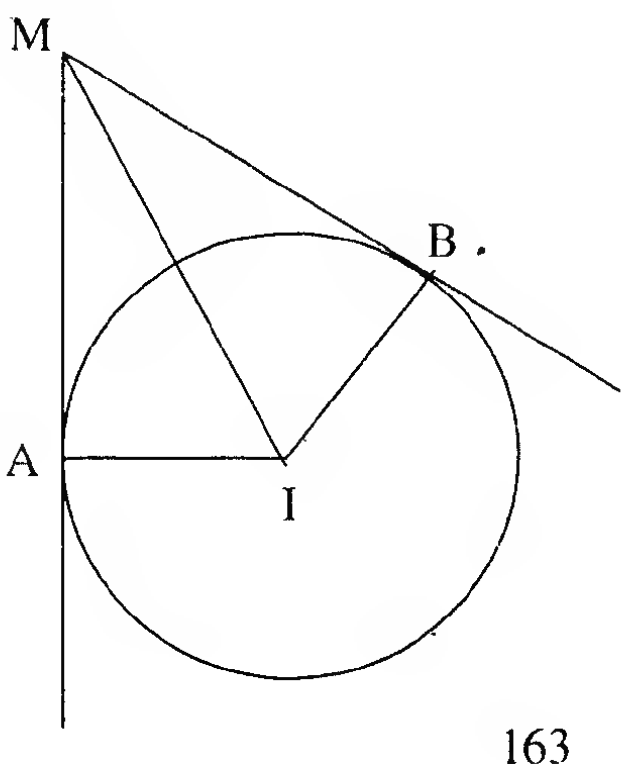
TH1: $\widehat{AMB} = 60^0$

ΔAMI vuông tại A và có $\widehat{AMI} = 30^0$

$$\Rightarrow MI = \frac{IA}{\sin 30^0} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

M cách I một khoảng bằng 6, vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I bán kính MI, đương tròn này có phương trình:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 36$$



TH2: $\widehat{AMB} = 120^0$

Giải tương tự.

BT9: Trong mặt phẳng Oxy cho elip: $9x^2 + 16y^2 = 144$

a. Tìm các tiêu điểm, tiêu cự và tâm sai của elip.

b. Lập phương trình chính tắc của hyperbol (H) có cùng hình chữ nhật cơ sở với elip.

c. Lập phương trình của parabol (P) có đỉnh trùng với gốc tọa độ và tiêu điểm trùng với tiêu điểm bên phải của hyperbol.

Giải:

a. $9x^2 + 16y^2 = 144 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Elip (E) có phương dạng chính tắc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $a^2 = 16$, $b^2 = 9$

$\Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7 \Rightarrow c = \sqrt{7}$

* Tiêu điểm $F_1(-\sqrt{7}; 0)$, $F_2(\sqrt{7}; 0)$

* Tiêu cự $F_1F_2 = 2c = 2\sqrt{7}$

* Tâm sai: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

b. Elip (E) có hình chữ nhật cơ sở có phương trình đường thẳng chứa các cạnh là $x = \pm 4$, $y = \pm 3$

$\Rightarrow$ hyperbol (H) có cùng hình chữ nhật cơ sở với elip có phương trình

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

c. Vì tiêu điểm bên phải F_2 (5; 0) nằm trên trục hoành và có hoành độ đương nên parabol (P) nhận F_2 (5; 0) làm tiêu điểm có phương trình đạng chính tắc: $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ và có tiêu điểm $F(\frac{p}{2}; 0)$.

$\Rightarrow \frac{p}{2} = 5 \Rightarrow p = 10$

$\Rightarrow$ (P): $y^2 = 20x$.

BT10: Viết phương trình chính tắc của hyperbol (H) trong mỗ trường hợp sau:

a. (H) đi qua điểm M(5; 3) và có tâm sai $e = \sqrt{3}$.

b. Góc giữa mỗi tiệm cận với Ox bằng 60^0 và (H) đi qua điểm N(−6; 3)

Giải:

(H) có phương trình : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

a. (H) đi qua M(5; 3) ta có : $\frac{25}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1$ (1)

Vì $c^2 = a^2 + b^2$ nên $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \Rightarrow e^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2}$

$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 3 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 3a^2 \Leftrightarrow b^2 = 2a^2$ (*), thế vào (1) ta có:

$\frac{25}{a^2} - \frac{9}{2a^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{41}{2a^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 = \frac{41}{2}$, lại thế vào (*) ta có:

$b^2 = 2a^2 = 41 \Rightarrow (H) : \frac{x^2}{\frac{41}{2}} - \frac{y^2}{41} = 1.$

b. Chú ý rằng nếu đường thẳng d hợp với trục hoành góc φ, thì d có hệ số góc $k = tg\varphi$ hoặc $k = -tg\varphi$

Vì $tg60^0 = \sqrt{3}$, hơn nữa 2 tiệm cận của (H) có phương trình $y = \pm\frac{b}{a}x$

$\Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{3} \Leftrightarrow b = \sqrt{3}\,a \Leftrightarrow b^2 = 3a^2$ (1)

Mặt khác (H) đi qua điểm N(−6; 3) ta có: $\frac{36}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1$ (2)

Thế (1) vào(2) ta có: $\frac{36}{a^2} - \frac{3}{a^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{33}{a^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 = 33 \Rightarrow b^2 = 99$

$\Rightarrow (H): \frac{x^2}{33} - \frac{y^2}{99} = 1.$

BT11: Viết phương trình chính tắc của parabol trong mỗi trường hợp:

a. (P) có tiêu điểm F(3; 0).

b. Đường chuẩn của (P) có phương trình x + 13 = 0.

Giải:

Parabol (P) chính tắc có phương trình: $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ và có tiêu điểm $F(\frac{p}{2}; 0)$ và đường chuẩn $\Delta: x = -\frac{p}{2}$

a. (P) có tiêu điểm F(3; 0) $\Rightarrow \frac{p}{2} = 3 \Leftrightarrow p = 6$. Vậy (P): $y^2 = 12x$.

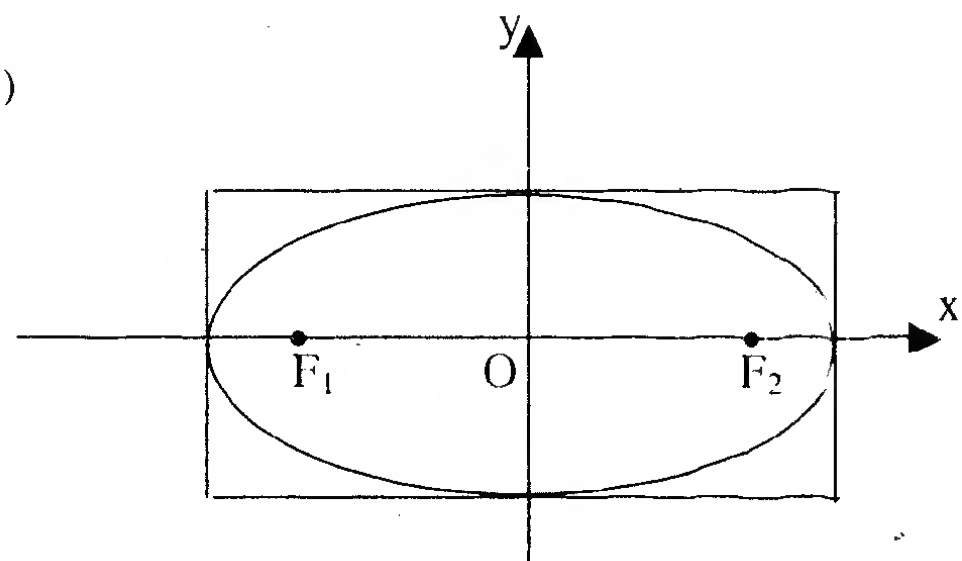
b. Đường chuẩn của (P) có phương trình: $x + 13 = 0 \Leftrightarrow x = -13$

$\Rightarrow \frac{p}{2} = 13 \Leftrightarrow p = 26$. Vậy (P): $y^2 = 52x$.

BT12: Quỹ đạo của mặt trăng là một elip với trái đất là một tiêu điểm. Chiều dài của trục lớn là 769266 km và tâm sai e = 0,0549. Tìm khoảng cách ngắn nhất và khoảng cách dài nhất từ trái đất đến mặt trăng.

Giải:

Cho elip (E) có phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



(E) có tiêu điểm $F_1 = (-c; 0)$
với $a^2 = b^2 + c^2$

$M(x_0; y_0) \in (E)$

$\Leftrightarrow \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$

$\Leftrightarrow \frac{y_0^2}{b^2} = 1 - \frac{x_0^2}{a^2}$

$\Leftrightarrow y_0^2 = b^2 - \frac{b^2 x_0^2}{a^2}$

$MF_1^2 = (x_0 + c)^2 + y_0^2 = x_0^2 + 2cx_0 + c^2 + b^2 - \frac{b^2 x_0^2}{a^2}$

$= x_0^2 + 2cx_0 + a^2 - \frac{b^2 x_0^2}{a^2} = \frac{a^2 x_0^2 + 2ca^2 x_0 + a^4 - b^2 x_0^2}{a^2}$

$= \frac{(a^2 - b^2)x_0^2 + 2ca^2 x_0 + a^4}{a^2} = \frac{c^2 x_0^2 + 2ca^2 x_0 + a^4}{a^2}$

$= (\frac{c}{a} x_0)^2 + 2.\frac{c}{a} x_0 a + a^2 = e^2 x_0^2 + 2eax_0 + a^2 = (ex_0 + a)^2$

$\Rightarrow MF_1^2 = |ex_0 + a|$

Lại do $0 < e < 1$ và $|x_0| \le a \Rightarrow MF_1 = ex_0 + a$

Trở lại bài toán:

Giả sử quĩ đạo của mặt trăng là một elip ở dạng chính tắc, trục lớn $2a = 769266$ km $\Rightarrow a = 384633$ (km). Trái đất nằm ở vị trí tiêu điểm F_1, $M(x_0; y_0)$ là vị trí bất kì của mặt trăng. Theo kết quả chứng minh trên

$MF_1 = ex_0 + a = 0{,}0549x_0 + 384633$

Mặt khác: $|x_0| \le 384633$

=> Min(MF) = 363516,6483 km đạt tại $x_0 =$ 384633

Max(MF) = 405749,3517 km đạt tại $x_0 = 384633$.

BL1: Cho elip (E) có phương trình dạng chính tắc $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ và có 2 tiêu điểm F_1, F_2. Tìm M thuộc (E) sao cho $MF_1 = 2MF_2$.

HD: Hãy chứng minh các công thức: $MF_1 = ex_0 + a$; $MF_2 = -ex_0 + a$

Sau đó giải phương trình $MF_1 = 2MF_2$ ta tính được x_0, từ đó thay vào phương trình của (E) ta có tung độ y_0 của M

BÀI TẬP BỔ SUNG

BT13: Cho đường thẳng Δ có phương trình tham số: $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = t \end{cases}$

a. Điểm A(−7; 3), B(2; 1) có nằm trên Δ không?

b. Tìm tọa độ giao điểm của Δ với các trục Ox, Oy.

c. Tìm trên Δ điểm M sao cho đoạn BM ngắn nhất (SBT)

HD và ĐS

a. $A \in \Delta$; $B \notin \Delta$.

b. Δ cắt Ox tại M(2; 0); Δ cắt Oy tại N(0; $\frac{2}{3}$).

c. $M \in \Delta \Rightarrow M(2-3t; t)$.

$BM^2 = (2 - 3t - 2)^2 + (t - 1)^2 = 9t^2 + t^2 - 2t + 1 = 10t^2 - 2t + 1$

$= 10(t - \frac{1}{10})^2 + \frac{9}{10} \ge \frac{9}{10}$. Đẳng thức $\Leftrightarrow t = \frac{1}{10}$

Vậy BM ngắn nhất $\Leftrightarrow$ M có tọa độ $(\frac{17}{10}; \frac{1}{10})$

Chú ý : Điểm M thỏa mãn BM ngắn nhất cũng chính là hình chiếu vuông góc của B lên Δ. Vì vậy ta có thêm một phương pháp tìm tọa độ hình chiếu của một điểm cho trước lên một đường thẳng Δ cho trước.

BL1 : Cho điểm A(1; 2) và đường thẳng Δ: x − 2y + 1 = 0. Tìm hình chiếu H vuông góc của A lên Δ.

Giải:

Cách 1: Gọi $H(x_0; y_0)$

Tính $\overrightarrow{AH}$, vectơ pháp tuyến của $\vec{n}$ của Δ

Từ điều kiện $\overrightarrow{AH}$ cùng phương với $\vec{n}$ và $H \in \Delta$ ta lập hệ phương trình 2 ẩn x_0, y_0. Giải hệ này ta tìm được tọa độ H.

Cách 2: Từ phương trình: $x - 2y + 1 = 0$, cho $y = t$ ta có $x = 2t - 1$

$H \in \Delta \Rightarrow H(2t - 1; t)$

Tìm t để AM ngắn nhất.

BT14: Cho 2 đường thẳng d_1: $3x + 4y = 0$; d_2: $12x - 5y = 0$

a. Tìm 1 vectơ chỉ phương $\vec{v}$ của d_1, 1 vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của d_2 sao cho $\vec{v}$, $\vec{u}$ là các vectơ đơn vị (có độ dài bằng 1). Góc giữa 2 vectơ này là nhọn hay tù?

b. Viết phương trình đường phân giác của góc tù tạo bởi d_1 và d_2.

Giải:

a. d_1 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1} = (4; -3)$ nên cũng có vectơ chỉ phương

$$\vec{v} = \frac{1}{5}\overrightarrow{u_1} = \left(\frac{4}{5}; -\frac{3}{5}\right)$$

d_2 có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_2} = (5; 12)$ nên cũng có vectơ chỉ phương

$$\vec{u} = \frac{1}{13}\overrightarrow{u_2} = \left(\frac{5}{13}; \frac{12}{13}\right)$$

Dễ dàng chứng minh rằng $|\vec{v}| = |\vec{u}| = 1$

$$\vec{u}\,\vec{v} = \frac{4}{5}\frac{5}{13} - \frac{3}{5}\frac{12}{13} < 0$$

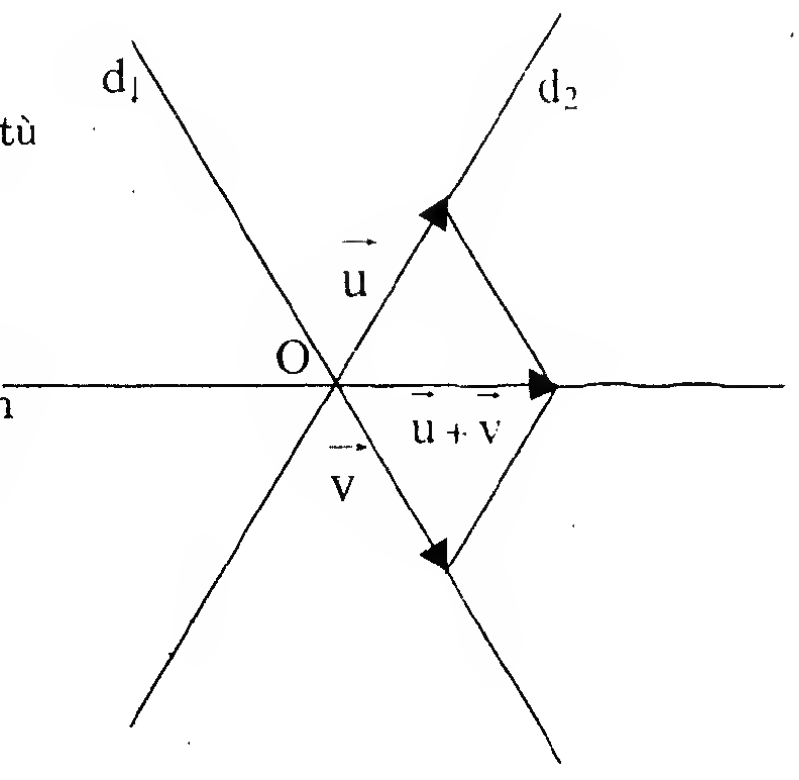
$\Rightarrow$ Góc giữa 2 vectơ $\vec{v}$ và $\vec{u}$ là tù

b. d_1 cắt d_2 tại O và góc giữa 2 vectơ $\vec{v}$ và $\vec{u}$ là tù

Nên đường phân giác Δ của góc tù tạo bởi d_1 và d_2 đi qua O và nhận

$$\vec{a} = \vec{u} + \vec{v} = \left(\frac{5}{13} + \frac{4}{5}; \frac{12}{13} - \frac{3}{5}\right)$$

$$= \left(\frac{77}{65}; \frac{21}{65}\right)$$



làm vectơ chỉ phương

$$\Rightarrow \Delta: \frac{x}{\frac{77}{65}} = \frac{y}{\frac{21}{65}} \Leftrightarrow 21x - 77y = 0$$

Chú ý rằng đường phân giác của góc nhọn tạo bởi d_1 và d_2 nhận $\vec{b} = \vec{u} - \vec{v}$ làm vectơ chỉ phương.

BL: Viết phương trình đường phân của góc nhọn, góc tù tạo bởi 2 đường thẳng cắt nhau D_1: $4x - 3y = 0$, D_2: $20x + 21y = 0$.

BT15: Cho phương trình $x^2 + y^2 - 2mx - 4(m-2)y + 6 - m = 0$ (1)

a. Tìm diều kiện của m dể (1) là phương trình của đường tròn (C_m).

b. Tìm tập hợp các tâm của (C_m) khi m thay đổi (SBT).

Giải:

(C_m) có phương trình dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

với $a = m$, $b = 2(m-2)$, $c = 6 - m$

a. (C_m) là đường tròn $\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4(m-2)^2 - (6-m) >$

$$\Leftrightarrow 5m^2 - 15m + 10 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 2 \end{array}\right. \quad (*)$$

Vậy m thỏa diều kiện (*) thì (C_m) là phương trình của đường tròn.

b. Với diều kiện (*) (C_m) là phương trình của đường tròn có tâm $I(m; 2(m-2))$

Đặt $\begin{cases} x = m & (1) \\ y = 2(m-2) & (2) \end{cases}$ Thế $m = x$ từ (1) vào (2) ta có

$y = 2(x-2) \Leftrightarrow y = 2x - 4$

Vì $m \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$ nên $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$

Vậy tập hợp các tâm I là các diểm thuộc đường thẳng $y = 2x - 4$ có hoành độ x thỏa mãn $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Chú ý: Để tìm tập hợp các điểm $M(\varphi(m); \varpi(m))$ với $m \in D$ ta thực hiện như sau: Đặt $\begin{cases} x = \varphi(m) \\ y = \varpi(m) \end{cases}$

Khử m tìm biểu thức liên hệ x, y (không chứa m): $f(x; y) = 0$

Từ điều kiện $m \in D \Rightarrow$ điều kiện của x, giả sử $x \in D_1$

Kết luận tập hợp các điểm M là dường (L) có phương trình $f(x; y) = 0$ với $x \in D_1$.

BL1: Cho phương trình $x^2 + y^2 + (m+2)x - (m+4)y + m + 1 = 0$ (1)

a. Tìm điều kiện của m để (1) là phương trình của đường tròn (C_m).

b. Tìm tập hợp các tâm của (C_m) khi m thay đổi.

ĐS: a. $m \le 1$ hoặc $m \ge 2$. b. $y = 4 - 2x$ với $x \le 3$ hoặc $x \ge 4$.

BL2: Cho đường tròn (C) có phương trình: $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ và đường thẳng d: $x - y + m = 0$.

a. Định m để d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B.

b. Tìm tập hợp các trung điểm của AB.

Giải:

a. d: $x - y + m = 0 \Leftrightarrow y = x + m$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) :

$$x^2 + (x + m)^2 - 2x - 4(x + m) + 1 = 0$$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2(m - 3)x + m^2 - 4m + 1 = 0$ (1)

d cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 (vì d không song song hoặc trùng với Oy)

$\Leftrightarrow \Delta' = (m - 3)^2 - 2(m^2 - 4m + 1) > 0$

$\Leftrightarrow -m^2 + 2m + 7 > 0$

$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{8} < m < 1 + \sqrt{8}$ (*).

b. Với điều kiện (*), A có hoành độ x_1, B có hoành độ x_2

Vì $A \in d \Rightarrow A(x_1; x_1 + m)$. Tương tự $B(x_2; x_2 + m)$

Gọi I là trung điểm của AB ta có: $I(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{(x_1 + m) + (x_2 + m)}{2})$

hay $I(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{x_1 + x_2}{2} + m)$

Vì x_1 và x_2 là 2 nghiệm của (1) nên theo định lí Viet ta có:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3 - m}{2} \Rightarrow I(\frac{3 - m}{2}; \frac{3 + m}{2})$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x = \dfrac{3 - m}{2} \\ y = \dfrac{3 + m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 - 2x & (1) \\ 2y - m - 3 = 0 & (2) \end{cases}$$

Thế $m = 3 - 2x$ từ (1) vào (2) ta có: $2y - (3 - 2x) - 3 = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow x + y - 3 = 0$

Từ điều kiện (*) và (1) ta có: $1 - \sqrt{8} < 3 - 2x < 1 + \sqrt{8}$

$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} < x < 1 + \sqrt{2}$ (**)

Vậy tập hợp các điểm I là các điểm thuộc đường thẳng x +y 3 = 0 với hoành độ x thỏa mãn (**)

Bạn đọc hãy giải bài toán trên bằng phương pháp hình học.

BT16: Cho 2 đường tròn (C_1): $x^2 + y^2 = 9$; (C_2):$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$

a. Xét vị trí tương đối của 2 đường tròn trên.

b. Viết phương trình tiếp tuyến chung của 2 đường tròn trên.

Giải:

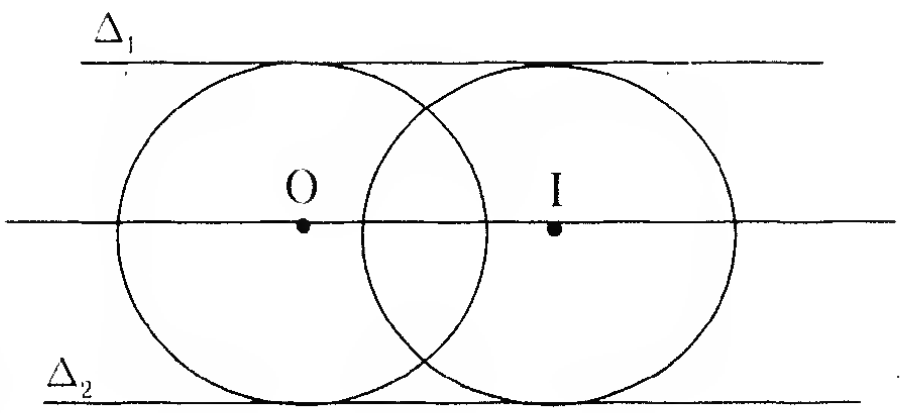
a. (C_1) có tâm O và bán kính $R_1 = 3$, (C_2) có tâm I(1; 1) và bán kính $R_2 = 3$

$OI = \sqrt{2}$

Ta có:

$|R_1 - R_2| < OI < R_1 + R_2$

Vậy (C_1) cắt (C_2).



b. Vì (C_1) cắt (C_2) cắt nhau và có bán kính bằng nhau nên chúng có 2 tiếp tuyến chung Δ song song và cách đường nối tâm OI một khoảng bằng R = 3

OI: x - y = 0

$$M(x; y) \in \Delta \Leftrightarrow d(M; OI) = 3 \Leftrightarrow \frac{|x - y|}{\sqrt{2}} = 3 \Leftrightarrow |x - y| = 3\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x - y = 3\sqrt{2} \\ x - y = -3\sqrt{2} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x - y - 3\sqrt{2} = 0 \quad (1) \\ x - y + 3\sqrt{2} = 0 \quad (2) \end{bmatrix}$$

Vậy 2 tiếp tuyến chung của (C_1) và (C_2) lần lượt có phương trình là (1) và (2)

BL: Cho họ đường tròn (C_m): $x^2 + y^2 - 2mx + 2my + 2m^2 - 9 = 0$

a. Chứng minh họ đường tròn (C_m) có bán kính không đổi. Tính bán kính này.

b. Tìm tập hợp các tâm I của họ đường tròn $(C_m$.

c. Chứng minh rằng họ đường tròn (C_m) tiếp xúc với 2 đường thẳng cố định. Viết phương trình 2 đường thẳng này.

HD:

a. R = 3;

b. Tập hợp các tâm I là đường thẳng d: x + y = 0;

c. Vì họ đường tròn (C_m) có bán kính không đổi R = 3 và tập các tâm I là đường thẳng d: x + y = 0 nên (C_m) tiếp xúc với 2 đường thẳng song song và cách đ một khoảng bằng R = 3.

BT17: Lập phương trình chính tắc của parabol (P) trong mỗi trường hợp sau:

a. (P) đi qua điểm M(1; 3).

b. Khoảng cách từ đỉnh của (P) đến đường chuẩn của (P) bằng 5.

c. Phương trình đường chuẩn là $2x + 3 = 0$ (SBT).

HD: Phương trình chính tắc của parabol có dạng $y^2 = 2px$ $(p > 0)$, trong đó đỉnh là O(0; 0) và đường chuẩn có phương trình $x = -\frac{p}{2}$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM TRONG SÁCH GIÁO KHOA

BT1: Cho 2 điểm A(1; 2), B(3; 4). Tọa độ của một vectơ đơn vị cùng phương với $\overrightarrow{AB}$ là:

a. (1; 1) b. $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ c. $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ d. $(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}})$.

HD: Vectơ đơn vị phải có độ dài bằng 1

Vectơ có tọa độ ở 3 câu a, b, c đều có độ đài khác 1 vì vậy câu đúng nếu có chỉ có thể là câu đ, vì vectơ có tọa độ $(-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}})$ có độ dài

$$\sqrt{(-\frac{1}{\sqrt{2}})^2 + (-\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1$$

Ta có: $\overrightarrow{AB}(2; 2)$

Mặt khác $2.(-\frac{1}{\sqrt{2}}) - 2(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0 \Rightarrow$ vectơ có tọa độ ở câu d cùng phương với $\overrightarrow{AB}$

Vậy câu đ đúng.

BT2: Cho $\vec{a} = (2; 5)$; $\vec{b} = (3; -7)$. Góc giữa 2 vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

a. $\frac{3\pi}{4}$ b. $\frac{\pi}{4}$ c. $\frac{\pi}{2}$ d. $\frac{3\pi}{2}$

HD: Sử dụng công thức : $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$.

Với $\vec{a} = (a_1; a_2)$, $\vec{b} = (b_1; b_2)$.

BT3: Cho các điểm A(−1; 1), B(1; 3), C(1; −1). Chọn câu trả lời đúng và đầy đủ nhất.

a. Tam giác ABC đều. b. Tam giác ABC vuông cân.

c. Tam giác ABC cân.

HD: Hãy tính độ dài 3 cạnh AB, BC, CA

BT4: Cho các điểm A(−1; 1), B($\vec{0}$; 2), C(3; 1)D(0; −2). Chọn mệnh đề sa trong các mệnh đề sau:

a. AB // DC b. AC = BD c. AD = BC d. AD // BC

HD: $\overrightarrow{AB}$ = (1; 1); $\overrightarrow{CD}$ = (−3; −3); $\overrightarrow{AD}$ = (1; −3); $\overrightarrow{BC}$ = (3; −1)

AC = 4; BD = 4; AD = $\sqrt{10}$; BC = $\sqrt{10}$

Vì $\frac{-3}{1} = \frac{-3}{1} \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ cùng phương

Mặt khác $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương ⇒ AB // DC

Vậy chỉ có câu sai d.

BT5: Cho 4 điểm A(2; 1), B(2; −1), C(−2; −3) và D(−2; −1). Xét 3 mệnh đề sau:

I. ABCD là hình thoi II. ABCD là hình bình hành

III. AC cắt BD tại M(0; −1)

Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

a. Chỉ (I) đúng b. Chỉ (II) đúng

c. Chỉ (II) và (III) đúng đ. Cả ba đều đúng.

HD: Nếu (I) đúng thì (II) đúng vì vậy a) không đúng và d) cũng khôn đúng

Kiểm tra câu (III) ta có M là trung điểm của AC và BD vậy câu b sa

Vậy câu c đúng.

BT6: Cho tam giác ABC có tọa độ các đỉnh là A(1; 2), B(3; 1) và C(5; 4 Phương trình đường cao vẽ từ A là:

a. 2x + 3y − 8 = 0, b. 3x − 2y − 5 = 0

c. 5x − 6y + 7 = 0, d. y − 2 = 0

HD: $\overrightarrow{BC}$ = (2; 3).

Đường cao vẽ từ A đi qua A và có vectơ pháp tuyến là: $\overrightarrow{BC}$ = (2; 3).

Câu a đúng.

BT7: Cho tam giác ABC với A(−1; 1), B(4; 7) và C(3; − 2). Phương trình tham số của trung tuyến CM là:

a. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - 4t \end{cases}$ b. $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 4t \end{cases}$ c. $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 4 + 2t \end{cases}$ d. $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = -2 + 4t \end{cases}$

HD: M là trung điểm của AB $\Rightarrow M(\frac{3}{2}; 4) \Rightarrow \overrightarrow{CM} = (-\frac{3}{2}; 6) = -\frac{3}{2}(1; -4)$

$\Rightarrow$ Trung tuyến CM đi qua C và VTCP $\vec{u} = (1; -4)$.

Câu a đúng.

BT8: Tìm phương trình đường thẳng Δ song song với dường thẳng d: $3x - 4y + 12 = 0$ và cắt Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho AB = 5 ta có:

a. $3x - 4y + 12 = 0$. b. $6x - 8y - 12 = 0$.

c. $3x - 4y - 12 = 0$. d. $3x - 4y - 6 = 0$.

HD: Đường thẳng ở câu a trùng với d (loại).

Đường thẳng ở câu b cắt Ox, Oy lần lượt tại $A(0; -\frac{3}{2})$ và B (2 0).

$\Rightarrow AB = \frac{5}{2}$ loại.

Đường thẳng ở câu d $\equiv$ Đường thẳng ở câu b loại.

Bạn đọc hãy kiểm tra câu c đúng.

BT9: Trong các đường thẳng sau đường nào vuông góc với đường thẳng d: $x + 2y - 4 = 0$ và hợp với hai trục tọa độ thành một tam giác có diện tích bằng 1

a. $2x + y + 2 = 0$. b. $2x - y - 1 = 0$.

c. $x - 2y + 2 = 0$. d. $2x - y + 2 = 0$.

HD: Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng d: $x + 2y - 4 = 0$ có VTPT $\vec{n} = (2; -1)$

Vậy câu c, câu a loại.

* Đường thẳng ở câu a cắt Ox, Oy tại A(0; 2), B(−1; 0)

$\Rightarrow S_{ABO} = 1$ (đúng).

* Đường thẳng ở câu b cắt Ox, Oy tại A(0; −1), $B(\frac{1}{2}; 0)$

$\Rightarrow S_{ABO} = \frac{1}{4}$ (sai).

* Tương tự, câu d đúng

Có thể tìm trực tiếp như sau:

Đường thẳng Δ có phương trình: $2x - y + C = 0$

$x = 0 \Rightarrow y = C$; $y = 0 \Rightarrow x = -\frac{C}{2}$

Vậy Δ cắt Ox, Oy lần lượt tại A $(-\frac{C}{2}; 0)$, B(0; C)

Ta có: $S_{AOB} = \frac{1}{2} OA.OB = \frac{1}{2} |-\frac{C}{2}| |C| = \frac{C^2}{4} \Rightarrow 1 = \frac{C^2}{4}$

$\Leftrightarrow C^2 = 4 \Leftrightarrow C = \pm 2$.

Vậy câu d đúng.

BT10: Tìm tâm I và bán kính R của đường tròn (C):

$x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0$ ta được:

a. I(−1; 1), R = 1.

b. $I(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$.

c. $I(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

d. I(1; −1), $R = \sqrt{6}$.

HD: Đường tròn (C) có phương trình dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2bax + c = 0$ có tâm I(a; b) có bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

BT11: Cho A(3; 5), B(2; 3), C(6; 2). Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình:

a. $x^2 + y^2 - 25x - 19y + 68 = 0$,

b. $x^2 + y^2 + 25x + 19y - 68 = 0$

c. $x^2 + y^2 - \frac{25}{3}x - \frac{19}{3}y + \frac{68}{3} = 0$,

d. $x^2 + y^2 + \frac{25}{3}x + \frac{19}{3}y + \frac{68}{3} = 0$

HD: Phương trình đường tròn (C) có dạng: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

Vì A(3; 5), B(2; 3), C(6; 2) ∈ (C) ta có:

$$\begin{cases} -6a - 10b + c = -34 \\ -4a - 6b + c = -13 \\ -12a - 4b + c = -40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{25}{6} \\ b = \frac{19}{6} \\ c = \frac{68}{3} \end{cases}$$

Câu c đúng.

BT12: Xét vị trí tương đối của hai đường tròn

(C_1): $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$ và (C_2): $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ ta được:

a. (C_1) cắt (C_2).

b. (C_1) không có điểm chung với (C_2).

c. (C_1) tiếp xúc trong với (C_2).

d. (C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2).

HD:

(C_1) có tâm $I_1(-1; 3)$ và bán kính $R_1 = 2$

(C_2) có tâm $I_2(2; -1)$ và bán kính $R_2 = 3$

$I_1I_2 = 5$

Vì $I_1I_2 = R_1 + R_2$ nên (C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2)

Câu d đúng.

Chú ý: Cho đường tròn (C_1) có tâm I_1 và bán kính R_1, đường tròn (C_2) có tâm I_2 và bán kính R_2

(C_1) ở ngoài $(C_2) \Leftrightarrow I_1I_2 > R_1 + R_2$

(C_1) tiếp xúc ngoài với $(C_2) \Leftrightarrow I_1I_2 = R_1 + R_2$

(C_1) cắt $(C_2) \Leftrightarrow |R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2$

(C_1) tiếp xúc trong với $(C_2) \Leftrightarrow I_1I_2 = |R_1 - R_2|$

Hai đường tròn đựng nhau (Đường tròn này ở trong đường tròn kia) $\Leftrightarrow I_1I_2 < |R_1 - R_2|$

BL1: Xét vị trí tương đối của hai đường tròn

(C_1): $x^2 + y^2 - 14x - 2y + 46 = 0$ và (C_2): $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$.

ĐS: ngoài nhau.

BL2: Cho 2 đường tròn: (C_1): $x^2 + y^2 - x - 6y + 8 = 0$ và

(C_2): $x^2 + y^2 - 2mx - 1 = 0$

Định m để 2 đường tròn tiếp xúc nhau. Chỉ rõ loại tiếp xúc.

HD: (C_1) có tâm $I_1(\frac{1}{2}; 3)$ bán kính $R_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$

(C_2) có tâm $I_2(m; 0)$ bán kính $R_2 = \sqrt{m^2 + 1}$

$$I_1I_2 = \sqrt{(m - \frac{1}{2})^2 + 9} = \sqrt{m^2 - m + \frac{37}{4}}.$$

a. (C_1) tiếp xúc ngoài với $(C_2) \Leftrightarrow I_1I_2 = R_1 + R_2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{m^2 - m + \frac{37}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{m^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m + \frac{37}{4} = \frac{5}{4} + m^2 + 1 + \sqrt{5}\sqrt{m^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow 7 - m = \sqrt{5}\sqrt{m^2 + 1} \Leftrightarrow \begin{cases} 49 - 14m + m^2 = 5m^2 + 5 \\ m < 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 + 14m - 44 = 0 \\ m < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -\dfrac{11}{2} \end{cases}.$$

b. ***HD:*** (C_1) tiếp xúc trong với (C_2) $\Leftrightarrow I_1I_2 = |R_1 - R_2|$.

BT13: Cho elip (E): $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ và cho các mệnh đề:

I. (E) có tiêu điểm $F_1(-4; 0)$ và $F(4; 0)$,

II. (E) có tâm sai $e = \dfrac{4}{5}$,

III. (E) có đỉnh $A_1(-5; 0)$,

IV. (E) có độ dài trục nhỏ bằng 8.

Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai:

a. (I) và (II) b. (II) và (III) c. (I) và (III) d. (IV) và (I)

HD: Ta có: $a = 5, b = 3 \Rightarrow c = 4$

Vì vậy $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5}$, đỉnh $A_1(-5; 0)$, độ dài trục nhỏ $2b = 6$. Vậy câu d sai.

BT14: Lập phương trình chính tắc của elip có 2 đỉnh là $(-3; 0)$ và $(3; 0)$ và 2 tiêu điểm là $(-1; 0)$, $(1; 0)$. Ta được:

a. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{1} = 1$. b. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{8} = 1$.

c. $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. d. $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

HD: $a = 3, c = 1 \Rightarrow b^2 = 8$.

Câu b

BT15: Cho elip (E): $x^2 + 4y^2 = 1$

I. (E) có trục lớn bằng 1, II. (E) có trục nhỏ bằng 4,

III. (E) có tiêu điểm $F_1(0; \dfrac{\sqrt{3}}{2})$, IV. (E) có tiêu cự bằng $\sqrt{3}$.

Trong các mệnh đề sau tìm mệnh đề sai:

a. (I) b. (II) và (IV) c. (I) và (III) d. (IV).

HD: $x^2 + 4y^2 = 1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$

$\Rightarrow a^2 = 1,\ b^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(E) có trục lớn bằng 2a = 2, trục nhỏ bằng 2b = 1, tiêu điểm $F_1 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, tiêu cự bằng $2c = \sqrt{3}$.

BT16: Dây cung của elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ vuông góc với trục lớn tại tiêu điểm có độ dài là:

a. $\frac{2c^2}{a}$ b. $\frac{2b^2}{a}$ c. $\frac{2a^2}{c}$ d. $\frac{a^2}{c}$.

HD: Xét tiêu điểm $F_2(c; 0)$

$$x = c \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{b^4}{a^2} \Rightarrow y = \pm\frac{b^2}{a}.$$

$\Rightarrow$ Đường thẳng qua tiêu điểm F_2 và vuông góc với trục lớn cắt (E) tại $A(c; \frac{b^2}{a})$, $B(c; -\frac{b^2}{a})$ $\Rightarrow AB = \frac{2b^2}{a}$

BT17: Lập phương trình chính tắc của hyperbol có đỉnh $A_1(-1; 0)$ và có tiêu điểm $F_2(3; 0)$. Ta được:

a. $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$ b. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{8} = 1$

c. $\frac{x^2}{8} - y^2 = 1$ d. $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{9} = 1$

HD: Hyperbol (H) có dạng chính tắc: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(H) có đỉnh $A_1(-a; 0) \Rightarrow a = 1$

(H) tiêu điểm $F_2(c; 0) \Rightarrow c = 3 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 = 9 \Rightarrow b^2 = 8$

Câu a đúng.

BT18: Cho hyperbol (H): $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

a. (H) có tiêu điểm $F_1(-5; 0)$.

b. (H) có độ dài trục thực bằng 8.

c. (H) có tâm sai $e = \frac{5}{4}$.

d. (H) có 2 tiệm cận $y = \pm\frac{4}{3}x$.

HD: $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$; $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 = 25 \Rightarrow c = 5$

$\Rightarrow F_1(-5; 0)$; độ dài trục thực $2a = 8$; tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$

Hai đường tiệm cận $y = \pm\frac{3}{4}x$

Câu d sai.

BT19: Trong các phương trình sau phương trình nào không phải là phương trình của hyperbol.

a. $x^2 - y^2 = 1$.

b. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.

c. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.

d. $4x^2 - 9y^2 = 36$.

DS: Câu c.

BT20: Cho parabol (P): $y^2 = 4x$

Điểm nào sau đây là tiêu điểm của (P)

a. (2; 0).

b. (1; 0).

c. (4; 0).

d. (0; 1).

HD: $p = 2$, tiêu điểm $F(\frac{p}{2}; 0) \Rightarrow F(1; 0)$.

BT21: Tìm phương trình của parabol có tiêu điểm F(4; 0) và đường chuẩn Δ: $x = -4$ ta được:

a. $y^2 = 4x$.

b. $y^2 = 8x$.

c. $y^2 = 2x$.

d. $y^2 = 16x$.

HD: Parabol đã cho có phương trình dạng chính tắc : $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ và có tiêu điểm $F(\frac{p}{2}; 0)$ và đường chuẩn Δ:

$$x = -\frac{p}{2} \Rightarrow \frac{p}{2} = 4 \Leftrightarrow p = 8 \Rightarrow y^2 = 16x$$

Câu d đúng.

BT22: Cho parabol (P): $y = x^2$. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

a. (P) có đỉnh O(0; 0).

b. (P) có tiêu điểm $F(0; \frac{1}{2})$.

c. (P) có đường chuẩn Δ: $y = -\frac{1}{4}$.

đ. (P) có trục đối xứng Oy.

ĐS: Câu b.

ÔN TẬP CUỐI NĂM

BT1: Cho tam giác ABC có AB = AC = 5, $\widehat{BAC} = 120^0$ nội tiếp trong đường tròn tâm I, D là trung điểm của AB, E là trọng tâm tam giác ADC

a. Tính $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

b. AH là đường cao của tam giác ABC, biểu diễn $\overrightarrow{AH}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

c. Chứng minh IE $\perp$ CD

Giải:

a. Sử dụng định nghĩa tích vô hướng

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos A = 5.5.\cos 120^0 = -\frac{25}{2}$$

b. $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}$

$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CH}$

Cộng 2 đẳng thức trên vế theo vế ta có:

$$2\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH}$$

Do H là trung điểm của BC ta có: $\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH} = \vec{0}$

$$\Rightarrow 2\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

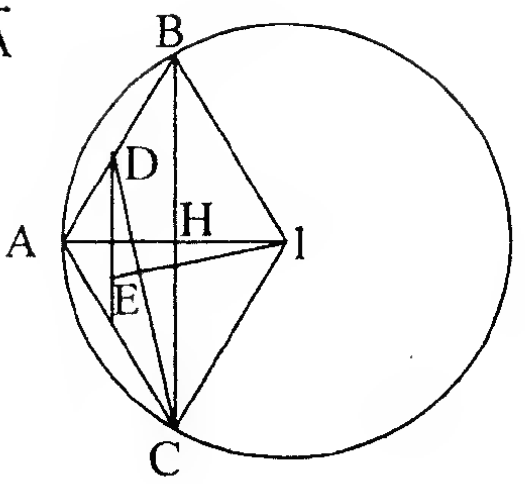
Có thể dùng quy tắc hình bình hành để biểu diễn $\overrightarrow{AH}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ bằng cách chứng minh ABIC là hình thoi.

c. Ta chứng minh $\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{CD} = \vec{0}$.

E là trọng tâm tam giác ADC $\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{IA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$$

D là trung điểm của AB $\Leftrightarrow 2\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}$



$$6\overrightarrow{IE}\,\overrightarrow{CD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{IA}\,\overrightarrow{CB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{IA}\,\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IB}\,\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IB}\,\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{IC}\,\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{IC}\,\overrightarrow{CA}$$

$\overrightarrow{IA}\,\overrightarrow{CB} = 0$ ($\overrightarrow{IA} \perp \overrightarrow{CB}$)

$\overrightarrow{IA}\,\overrightarrow{CA} = 2AH^2$ (công thức hình chiếu)

$\overrightarrow{IB}\,\overrightarrow{CB} = 2BH^2$ (công thức hình chiếu)

$\overrightarrow{IB}\,\overrightarrow{CA} = IB^2$

$\overrightarrow{IC}\,\overrightarrow{CB} = -2BH^2$ (công thức hình chiếu)

$\overrightarrow{IC}\,\overrightarrow{CA} = -\frac{1}{2}IC^2$

$$\Rightarrow 6\overrightarrow{IE}\,\overrightarrow{CD} = 3AH^2 + BH^2 + \frac{1}{2}IB^2 - 2BH^2 - \frac{1}{2}IC^2 = 3AH^2 - BH^2 = 0$$

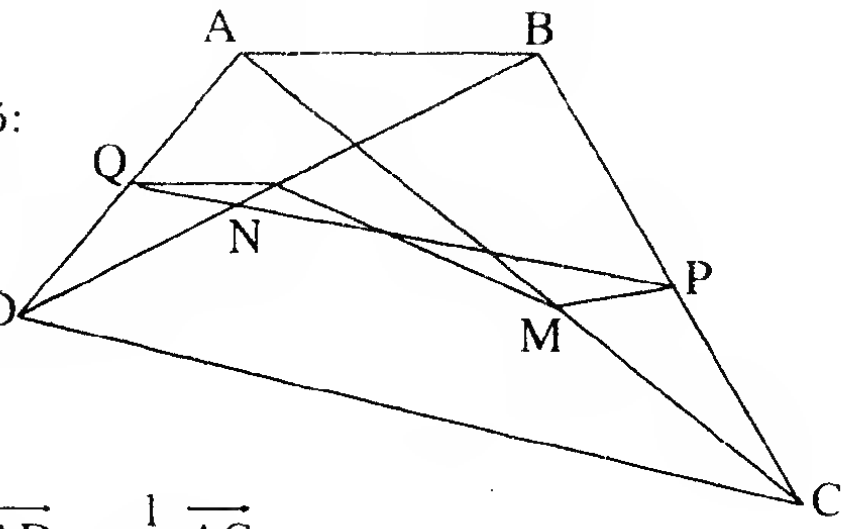
$\Rightarrow IE \perp CD$

BT2: Cho tứ giác lồi ABCD, Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AC, BD, BC, AD. Đặt $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$

a. Chứng minh $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{w} - \vec{v})$, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v} - \vec{w})$.

b. Chứng minh rằng nếu MN = PQ thì AB ⊥ CD. Điều ngược lại có đúng không?

HD: Dùng quy tắc 3 điểm của phép trù biến đổi $\overrightarrow{MN}$ về vectơ có điểm đầu là điểm A



Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$ (1)

Do M là trung điểm của AC ta có:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

N là trung điểm của BD ta có:

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

Thế vào (1): $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{w} - \vec{v})$$

Chứng minh tương tự cho $\overrightarrow{PQ}$.

b. ***HD:*** Từ giả thiết $\overrightarrow{MN}^2 = \overrightarrow{PQ}^2$ ta biến đổi tương đương để xuất hiện $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$

Ta có:

$4\overrightarrow{MN}^2 = (\vec{u} + \vec{w} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{w}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}.\vec{w} - 2\vec{u}.\vec{v} - 2\vec{w}.\vec{v}$

$4\overrightarrow{PQ}^2 = (\vec{u} + \vec{v} - \vec{w})^2 = \vec{u}^2 + \vec{w}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} - 2\vec{u}.\vec{w} - 2\vec{v}.\vec{w}$

Theo giả thiết: $4\overrightarrow{MN}^2 = 4\overrightarrow{PQ}^2$

$\Leftrightarrow \vec{u}^2 + \vec{w}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}\vec{w} - 2\vec{u}\vec{v} - 2\vec{w}.\vec{v}$

$= \vec{u}^2 + \vec{w}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} - 2\vec{u}.\vec{w} - 2\vec{v}.\vec{w}$

$\Leftrightarrow 2\vec{u}.\vec{w} - 2\vec{u}.\vec{v} = 2\vec{u}.\vec{v} - 2\vec{u}.\vec{w} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{w} - \vec{u}.\vec{v} = 0$

$\Leftrightarrow \vec{u}(\vec{w} - \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{CD} = 0 \Leftrightarrow AB \perp CD$

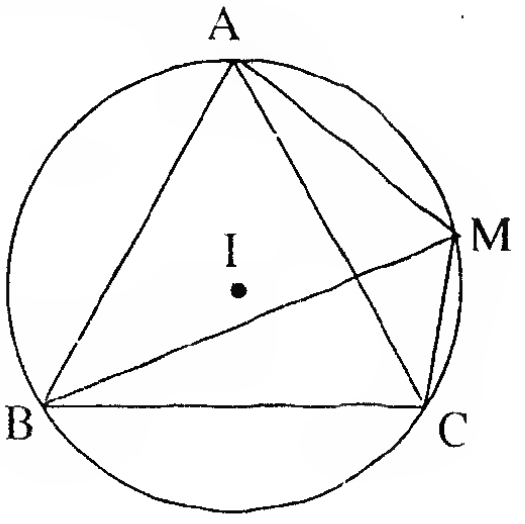
BT3: a. Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn tâm I bán kính R. M là điểm tùy ý trên đường tròn.

a. Chứng minh: $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$.

b. Tổng quát bài toán cho đa giác đều n cạnh $A_1A_2...A_n$.

HD:

Ta chứng minh VT bằng VP



Giải:

a. $MA^2 + MB^2 + MC^2$

$= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2$

$= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}\,\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}\,\overrightarrow{IB}$

$+ \overrightarrow{IB}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}\,\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IC}^2$

$= 6R^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC})$

Do tam giác ABC đều nên I còn là trọng tâm vì vậy $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$\Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = 6R^2$

b. Bài toán tổng quát: Cho đa giác đều n cạnh $A_1A_2...A_n$ nội tiếp trong đường tròn tâm I bán kính R. M là điểm tùy ý trên đường tròn

Chứng minh: $MA_1^2 + MA_2^2 + ... + MA_n^2 = 2nR^2$.

BT4: Cho tam giác đều ABC có cạnh 6cm. Một điểm M tùy ý nằm trên cạnh BC sao cho BM = 2cm

a. Tính độ dài đoạn thẳng AM và tính côsin của góc $\widehat{BAM}$.

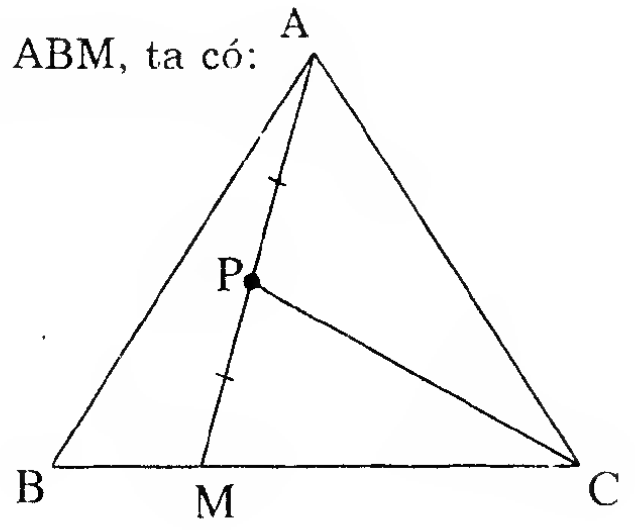
b. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM.

c. Tính độ dài đường trung tuyến vẽ từ C của tam giác ACM

d. Tính diện tích tam giác ABM

Giải:

a.



Cách 1: Dùng định lí côsin cho tam giác ABM, ta có:

$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB.BM.\cos B$

$= 6^2 + 2^2 - 2.6.2.\cos 60^0$

$= 40 - 24.\frac{1}{2} = 40 - 12 = 28$

$\Rightarrow AM = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ cm.

Cách 2: BM = 2cm, CM = 4cm

$\Rightarrow 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Bình phương vô hướng 2 vế ta có:

$9AM^2 = (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = 4AB^2 + AC^2 + 4\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}$

$= 4.6^2 + 6^2 + 4.6.6.\cos 60^0 = 252 \Rightarrow AM^2 = 28$

* Đặt $\alpha = \widehat{BAM}$, tính $\cos\alpha$

Theo định lí côsin: $\cos\alpha = \frac{AB^2 + AM^2 - BM^2}{2AB.AM} = \frac{60}{12.2.\sqrt{7}} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$.

b. Sử dụng định lí sin để tính R

$\cos\alpha = \frac{5}{2\sqrt{7}} \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{\frac{3}{28}}$

Sử dụng định lí sin cho tam giác ABM ta có:

$\frac{BM}{\sin\alpha} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{BM}{2\sin\alpha} = \frac{2}{2\sqrt{\frac{3}{28}}} = \sqrt{\frac{28}{3}}$.

c. Sử dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến

Gọi CP là trung tuyến của tam giác ACM ta có:

$CP^2 = \frac{CA^2 + CM^2}{2} - \frac{AM^2}{4} = \frac{6^2 + 4^2}{2} - \frac{28}{4} = 26 - 7 = 19$

$\Rightarrow CP = \sqrt{19}$.

d. $S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2}AB.AM.\sin\alpha = \frac{1}{2}.6.2\sqrt{7}\sqrt{\frac{3}{28}} = 3\sqrt{3}$.

BL: Cho tam giác ABC có AB = 4, AC = 5, $\widehat{BAC} = 30^0$. M điểm trên đoạn BC sao cho BM = 2CM. Tính AM.

BT5: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có:

a. a = b.cosC + c.cosB. b. sinA = sinB.cosC + sinC.cosB.

c. $h_a = 2R.sinB.sinC$.

Giải:

Câu a, câu c xem bài tập.

b. Ta biến đổi tương đương đẳng thức cần chứng minh về đẳng thức đối với các cạnh bằng cách sử dụng định lí sin, côsin

$$sinA = sinB.cosC + sinC.cosB \Leftrightarrow \frac{a}{2R} = \frac{b}{2R}cosC + \frac{c}{2R}cosB$$

$\Leftrightarrow$ a = b.cosC + c.cosB (đúng theo câu a).

BT6: Cho 2 đường tròn (O; R) và (O'; R') không có điểm chung. Gọi d là trục đẳng phương của hai đường tròn đó. Từ một điểm I thay đổi trên d kẻ các tiếp tuyến IM, IN, IM', IN' tới 2 đường tròn

a. Chứng minh rằng 4 điểm M, N, M', N' nằm trên một đường tròn

b. Khi điểm I thay đổi tới vị trí I' trên d, vẽ bốn tiếp tuyến như trên, ta được đường tròn tâm I'. Chứng minh rằng đường thẳng OO' là trục đẳng phương của 2 đường tròn (I) và (I') trên.

c. Chứng minh rằng khi điểm I thay đổi trên d, các đường tròn tâm I đó luôn đi qua 2 điểm cố định.

Giải:

a. Vì I thuộc trục đẳng phương d của 2 đường tròn(O), (O')

Nên: $P_{I/(O)} = P_{I/(O')}$

Mặt khác:

$P_{I/(O)} = IM^2 = IN^2$

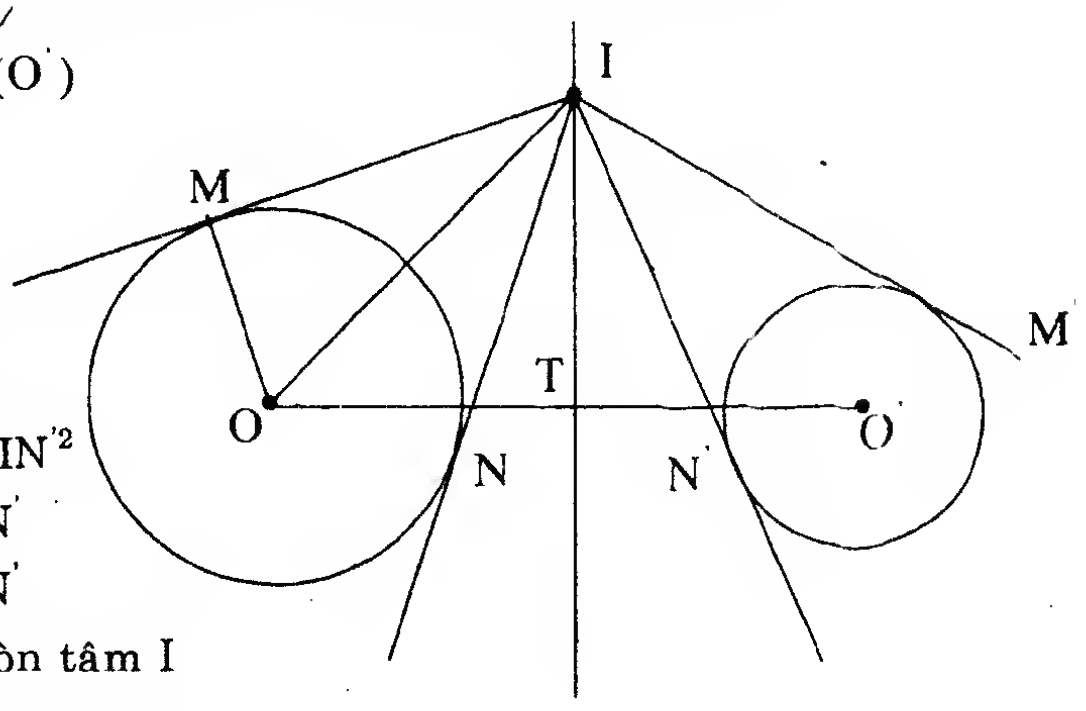
$P_{I/(O')} = IM'^2 = IN'^2$

$\Rightarrow IM^2 = IN^2 = IM'^2 = IN'^2$

$\Leftrightarrow IM = IN = IM' = IN'$

$\Rightarrow$ 4 điểm M, N, M', N'

nằm trên một đường tròn tâm I bán kính IM.



b. Ta có: $P_{O/(I)} = OI^2 - IM^2$

Theo định lí Pitagor $OI^2 - IM^2 = OM^2 = R^2 \Rightarrow P^{O}/_{(I)} = R^2$ không đổi

Vì vậy $P^{O}/_{(I')} = R^2 \Rightarrow P^{O}/_{(I)} = P^{O}/_{(I')} \Rightarrow$ O thuộc trục đẳng phương của (I) và (I')

Chứng minh tương tự ta có:

$P^{O'}/_{(I)} = P^{O}/_{(I')} = R'^2 \Rightarrow O'$ thuộc trục đẳng phương của (I) và (I')

Vậy OO' là trục đẳng phương của 2 đường tròn (I) và (I').

c. Dự đoán 2 điểm cố định nói ở đề bài là giao của (I) và OO'

Ta chứng minh (I) cắt OO' tại 2 điểm P, Q

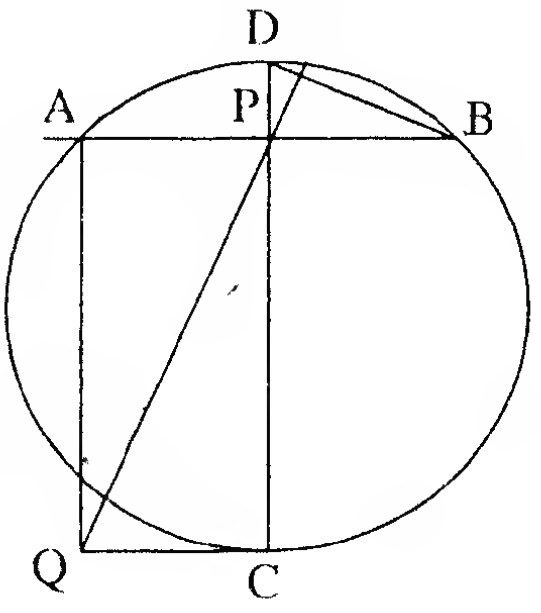
Gọi T là giao điểm của d và OO'

Vì (O) và (O') ngoài nhau nên T nằm ngoài 2 đường tròn này. Ta có:

$IM^2 = IO^2 - R^2 > IO^2 - OT^2 = IT^2 \Rightarrow IM > IT$, vậy (I) cắt OO' tại 2 điểm P, Q.

Vì OO' là trục đẳng phương của (I) và (I') mà (I) đi qua P, Q nên các đường tròn (I') cũng đi qua P, Q.

BT7: Từ một điểm P trong một hình tròn cho trước ta kẻ hai dây cung vuông góc APB, CPD. Chứng minh rằng hình chữ nhật APCQ có đường chéo PQ vuông góc với BD



HD: Ta chứng minh $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{DB} = 0$

APCQ là hình chữ nhật ta có:

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}$

$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{DB} = (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC})(\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PB})$

$= \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}.\overrightarrow{DP} + \overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PB}$

Mặt khác:

$\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{DP} = 0$ (do $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{DP}$)

$\overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PB} = 0$ (do $\overrightarrow{PC} \perp \overrightarrow{PB}$)

A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PD} \Leftrightarrow \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PD} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}.\overrightarrow{DP} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{BD}$

Có thể giải cách khác bằng phương pháp toạ độ như sau:

Ta chọn hệ toạ độ Oxy sao cho APB là $x'Ox$,

DPC là y'Oy (xem hình vẽ)

Đặt PA = a, PB = b, PC = c, PD = d

Trong mặt phẳng Oxy ta có: P(0; 0), Q(−a; c), D(0; −d), B(b; 0)

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (-a; c)$; $\overrightarrow{DB} = (b; d)$. Vậy:

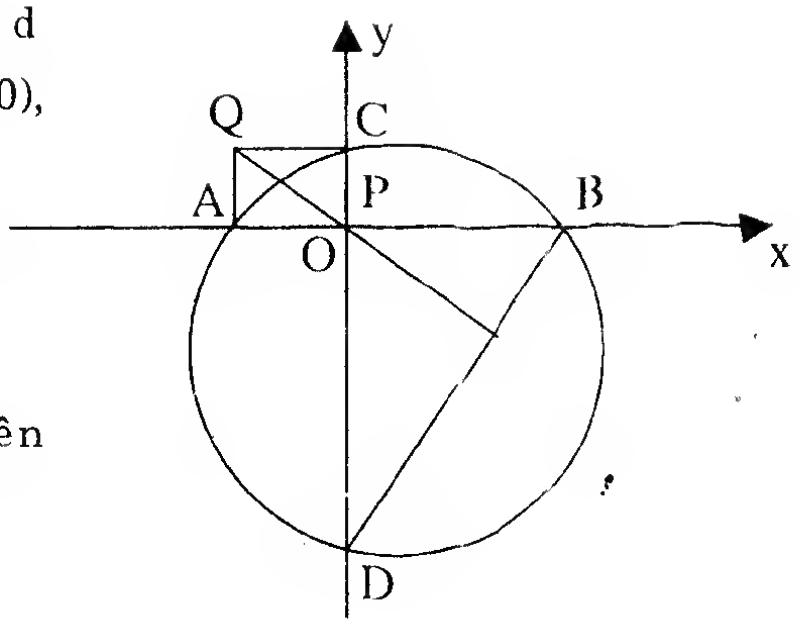
$\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{DB} = -ab + cd$

Vì A, B, C, D thuộc đường tròn, nên

PA.PB = PC.PD $\Leftrightarrow$ ab = cd

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ}\,\overrightarrow{DB} = 0.$

Vậy PQ ⊥ QB.



Chú ý: Để chọn hệ trục Oxy ta để ý tới các đường thẳng vuông góc, các góc vuông có mặt trong hình vẽ.

BL1: Cho tam giác ABC cân tại A. Gọi H là trung diểm của đoạn BC. D là hình chiếu của H lên AC và M là trung điểm của đoạn HD. Chứng minh: AM ⊥ BD (Xem cách giải bằng phương pháp vectơ trong tập sách này).

Giải:

Chọn hệ toạ độ Oxy sao cho O ≡ H, trục Ox trùng với BC

Gọi C(1; 0), B(−1; 0), A(0; a)

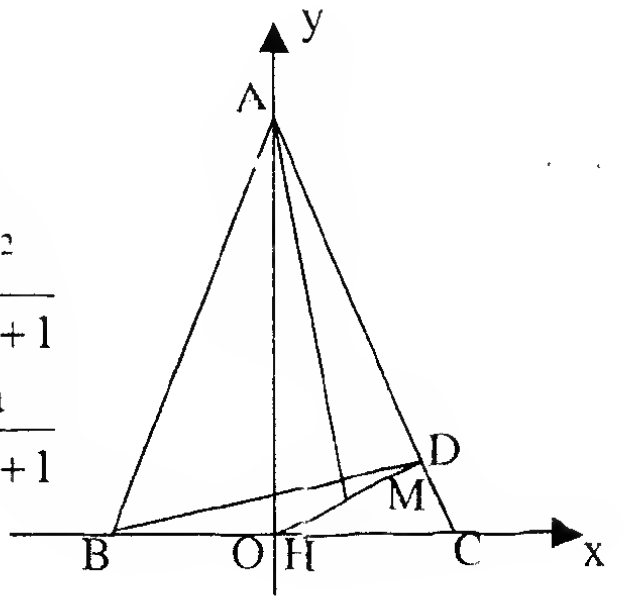
Gọi D(x; y) ta có:

$\overrightarrow{HD}(x; y)$, $\overrightarrow{AD} = (x; y - a)$, $\overrightarrow{AC} = (1; -a)$

Ta có: $\overrightarrow{HD} \perp \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$ cùng phương $\overrightarrow{AC}$

$$\begin{cases} x - ay = 0 \\ ax + y - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = ay \\ (a^2+1)y = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a^2}{a^2+1} \\ y = \dfrac{a}{a^2+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow D\left(\frac{a^2}{a^2+1}\ ;\ \frac{a}{a^2+1}\right)$$



M là trung điểm của HD $\Rightarrow$ $M\left(\dfrac{a^2}{2(a^2+1)}\ ;\ \dfrac{a}{2(a^2+1)}\right)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BD} = \left(\frac{a^2}{a^2+1} + 1;\ \frac{a}{a^2+1}\right);\ \overrightarrow{AM}\left(\frac{a^2}{2(a^2+1)};\ \frac{a}{2(a^2+1)} - a\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BD}\,\overrightarrow{AM} = \frac{a^4}{2(a^2+1)^2} + \frac{a^2}{2(a^2+1)} + \frac{a^2}{2(a^2+1)^2} - \frac{a^2}{a^2+1}$$

$$= \frac{a^4 + a^2(a^2+1) + a^2 - 2a^2(a^2+1)}{2(a^2+1)^2} = 0$$

$\Rightarrow AM \perp BD.$

BL2: Cho tam giác ABC vuông cân tại C. Trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy M, N, P sao cho: $\frac{MB}{MC} = \frac{NC}{NA} = \frac{PA}{PB}$

Chứng minh rằng : a) $CP \perp MN$ b) $CP = NM$.

HD: Chọn hệ toạ độ Oxy sao cho $O \equiv C$, trục hoành trùng với CA, trục tung trùng với CB.

Gọi C(0; 0), A(1; 0), B(0; 1). Đặt: $\frac{MB}{MC} = \frac{NC}{NA} = \frac{PA}{PB} = k$

Ta tính được $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{k}{1+k}; -\frac{1}{1+k}\right);\ \overrightarrow{CP} = \left(\frac{1}{1+k};\ \frac{k}{1+k}\right)$

Hãy chứng minh $\overrightarrow{MN}\,\overrightarrow{CP} = 0$ và $\overrightarrow{MN}^2 = \overrightarrow{CP}^2$.

BT8: Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm M(2; 5) và cách đều 2 điểm P(−1; 2) và Q(5; 4).

Giải:

Gọi Δ là đường thẳng đi qua M

Δ: $A(x - 2) + B(y - 5) = 0 \Leftrightarrow Ax + By - 2A - 5B = 0 \quad (A^2 + B^2 > 0)$

Theo giả thiết ta có:

$$d(P; \Delta) = d(Q; \Delta) \Leftrightarrow \frac{|-A + 2B - 2A - 5B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|5A + 4B - 2A - 5B|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\Leftrightarrow |-3A - 3B| = |3A - B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3A - 3B = 3A - B \\ -3A - 3B = -3A + B \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3A = -B \\ B = 0 \end{array}\right.$$

TH1: $3A = -B$: Chọn $A = 1, B = -3$; Δ: $x - 3y + 13 = 0$

TH2: $B = 0$, chọn $A = 1$; Δ: $x - 2 = 0$

BT9: Cho 3 điểm A(3; 5), B(2; 3) và C(6; 2)

a. Viết phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC.

b. Tìm điểm M sao cho phương tích của M đối với đường tròn (C) nhỏ nhất.

Giải:

a. (C) có phương trình dạng: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

Vì A, B, C thuộc (C) ta có:

$$\begin{cases} 9+25-6a-10b+c=0 \\ 4+9-4a-6b+c=0 \\ 36+4-12a-4b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6a-10b+c=-34 \\ -4a-6b+c=-13 \\ -12a-4b+c=-40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{25}{6} \\ b=\dfrac{19}{6} \\ c=\dfrac{68}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$(C): $x^2 + y^2 - \frac{25}{3}x - \frac{19}{3}y + \frac{68}{3} = 0$

b. (C) có tâm $I(\frac{25}{6}; \frac{19}{6})$, $P_{M/(C)} = IM^2 - R^2 \geq -R^2$

Vậy $P_{M/(C)}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv I \Leftrightarrow M(\frac{25}{6}; \frac{19}{6})$.

BT10: Cho họ đường (C_m) có phương trình:

$$x^2 + y^2 - 2mx - 4(m-2)y + 6 - m = 0$$

a. Tìm điều kiện của m để (C_m) là đường tròn.

b. Tìm tập hợp tâm các đường tròn (C_m) khi m thay đổi.

Giải:

a. (C_m) có phương trình dạng : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

Với $a = m$, $b = 2(m-2)$, $c = 6 - m$

(C_m) là đường tròn $\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4(m-2)^2 - (6-m) > 0$

$$\Leftrightarrow 5m^2 - 15m + 10 > 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m<1 \\ m>2 \end{bmatrix} \quad (*)$$

b. Với điều kiện (*), (C_m) có tâm $I(m; 2(m-2))$

Đặt $\begin{cases} x=m \\ y=2(m-2) \end{cases} \Rightarrow y = 2(x-2) \Leftrightarrow y = 2x - 4$

$$\begin{bmatrix} m<1 \\ m>2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x<1 \\ x>2 \end{bmatrix} \quad (**)$$

Vậy tập hợp của I là các điểm thuộc đường thẳng $y = 2x - 4$ có hoành độ x thỏa mãn (**).

BT11: Cho điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc elip (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b < a)$.

Gọi F_1, F_2 là 2 tiêu điểm của (E). Tính độ dài MF_1. MF_2.

Xem BT12 trang (166 – 167) đã giải trong sách này.

BT12: Một đường thẳng (d) cắt hyperbol (H) tại 2 điểm M. N và cắt hai đường tiệm cận của (H) tại 2 điểm P, Q. Chứng minh MP = NQ.

Giải:

Gọi (H): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Giả sử (d): $Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 > 0)$

Nếu A = 0, đường thẳng (d) cùng phương với trục hoành, do tính đối xứng ta có: MP = NQ

Nếu $A \neq 0$, chọn A = 1 ta có: (d): $x + By + C = 0$

Tọa độ M, N là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x + By + C = 0 \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -By - C \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{(By + C)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right.$$

$\Leftrightarrow b^2(B^2y^2 + 2C.By + C^2) - a^2y^2 = a^2b^2$

$\Leftrightarrow (b^2B^2 - a^2)y^2 + 2b^2.C.By + b^2C^2 - a^2b^2 = 0 \quad (*)$

$\Rightarrow$ M có tung độ y_M, N có tung độ y_N với $y_{M,\,N}$ là 2 nghiệm của (*)

Theo định lí Viet ta có: $y_M + y_N = \frac{2b^2.C.B}{a^2 - b^2.B^2}$

(H) có 2 đường tiệm cận d_1: $y = \frac{b}{a}x$ và $d_2 = -\frac{b}{a}x$

Tọa độ giao điểm P là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ x = -By - C \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{b}{a}By - \frac{b}{a}C \Leftrightarrow y = -\frac{b.C}{a + b.B}$$

Vậy P có tung độ $y_P = -\frac{b.C}{a + b.B}$

Tương tự Q có tung độ $y_Q = \frac{b.C}{a - b.B}$

Gọi J là trung điểm của MN, J có tung độ $y_J = \frac{1}{2}(y_M + y_N) = \frac{b^2.C.B}{a^2 - b^2.B^2}$

Gọi I là trung điểm của PQ, I có tung độ $y_I = \frac{1}{2}(y_P + y_Q)$

$= \frac{1}{2}\left(-\frac{b.C}{a + b.B} + \frac{b.C}{a - b.B}\right) = \frac{b^2.C.B}{a^2 - b^2.B^2}$

I, J có cùng tung độ và thuộc đường thẳng d: $x + By + C = 0$

$\Rightarrow I \equiv J$

Hai đoạn thẳng MN và PQ có cùng trung điểm vậy MP = NQ.

BT13: Cho 2 parabol (P_1): $y^2 = 2px$ và (P_2): $y = ax^2 + bx + c$

Chứng minh rằng nếu (P_1) cắt (P_2) tại 4 điểm phân biệt thì bốn điểm đó cùng thuộc một đường tròn.

Giải:

Tọa độ giao điểm của hai parabol đã cho là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y^2 = 2px \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases} \quad (a \neq 0) \quad (1)$$

Nhân 2 vế của phương trình thứ nhất với a rồi trừ đi phương trình thứ 2 vế theo vế ta có:

$$ay^2 - y = 2apx - ax^2 - bx - c \Leftrightarrow ax^2 + ay^2 - (2ap - b)x - y + c = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \frac{2ap - b}{a}x - \frac{1}{a}y + \frac{c}{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{2ap - b}{2a}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2a}\right)^2 = \left(\frac{2ap - b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \quad (*)$$

Đặt $R = \left(\frac{2ap - b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{1}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$

Nếu $R \leq 0$: (*) vô nghiệm hoặc có đúng 1 nghiệm (x; y) thì vô lí vì (1) phải có 4 nghiệm

Vậy $R > 0$ vậy (*) là phương trình của đường tròn

Vậy nếu (P_1) cắt (P_2) tại 4 điểm phân biệt thì bốn điểm đó cùng thuộc một đường tròn có phương trình (*)

MỤC LỤC

CHƯƠNG I: **VECTƠ** 3

PHÉP CỘNG VÀ PHÉP TRỪ HAI VECTƠ 8

PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ 19

TÍCH VÔ HƯỚNG 32

CHƯƠNG II. **HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ TRONG ĐƯỜNG TRÒN**

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC 52

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG ĐƯỜNG TRÒN 63

CHƯƠNG III: **PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG** 86

ĐƯỜNG THẲNG 98

ĐƯỜNG TRÒN 122

HYPERBOL 147

PARABOL 153

ĐƯỜNG CHUẨN CỦA 3 ĐƯỜNG CÔNIC 157

ÔN TẬP CUỐI NĂM 180

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại: (04) 9718312; (04) 7547936. Fax: (04) 9714899
E-mail: nxb@ vnu.edu.vn

★ ★ ★

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: PHẠM THÀNH HƯNG

Biên tập: TRẦN VĂN HÙNG

Sửa bài: MINH PHƯƠNG

Trình bày bìa: VÕ THỊ THỪA

KIẾN THỨC CƠ BẢN HÌNH HỌC 10 VÀ CÁC DẠNG BÀI TẬP ỨNG DỤNG

Mã số: 1L-80 ĐH2006
In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm tại Xí nghiệp in Tuần báo Văn nghệ Tp. Hồ Chí Minh
Số xuất bản: 496 - 2006/CXB/9 - 79/ĐHQGHN, ngày 26/06/2006.
Quyết định xuất bản số: 208 LK/XB
In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2006.